目　录

附：下册目录

第五章　拓扑空间和距离空间

引　言

一般拓扑学形成一个有机联系的理论整体那还只是半个世纪以来的事情；但它是可以追溯到古代的人们思想发展的必然结果.

当希腊数学家企图将数的概念精确化的时候，极限与连续的概念就摆到了他们面前. 然而，为了澄清收敛序列、收敛级数和连续函数的概念，尚需等待 Cauchy (1821) 和 Abel (1823) 的著作问世.

到了 Riemann (1851) 的时代，框架更为扩大；在 Riemann 的晋级论文《论作为几何学基础的假设》中，他拟就了一个辉煌的大纲，即研究《多次扩大的度量的一般概念》；这里不仅是扩张到任意维的流形，并且也包括了函数空间和集合空间.

但是如果不具备对实直线 (Dedekind) 和对数值函数 (Riemann, Weierstrass) 的良好知识，尤其是缺乏一种既精确而又一般的语言，这样一个大纲是不可能实现的. Cantor (1873) 创造了这种语言，从而打开了通向新世界的大门.

一个英雄辈出、硕果累累的时代由此开始. 尽管有对新观念持异议的数学家的反对，新发现却层出不穷，特别是在法国 (Poincaré, Hadamard, Borel, Baire, Lebesgue) 和德国 (Klein, Mittag-Leffler). 人们由此迅速地对曲线的函数进行了研究，并创立了实现 Riemann 大纲第一步的泛函分析 (Ascoli, Volterra, Hilbert).

然而，这再次显示了需要与这类研究相适应的某种语言和框架. 由 Fréchet 定义的距离空间为研究一致连续和一致收敛提供了一种基本工具，它对于研究拓扑结构来说，使用也很方便. Hausdorff 从众多的公理中提炼出一个简单的公理体系，这一体系已成为目前的一般拓扑学的基石. Banach 在赋范向量空间的框架中创造了一些其重要性不断增长的工具，从而奠定了泛函分析的基础.

我们对一般拓扑学的学习将从对实直线的初等学习开始；一般拓扑学的现代研究并未减少这样做的重要性. 实直线上的定义和性质都将在一种可直接推广到任意拓扑空间的形式下陈述；因此，在这个框架下，我们将可研究大部分拓扑性质.

一个拓扑空间可以是一条曲线、一张曲面，也可以是一个曲线空间，一个函数空间. 因此，我们将给出的每一陈述都概括了一大类特殊的陈述，以致可应用于大量问题. 不过，人们将只是逐步地发现在分析中和在几何中的应用的大量变化.

将用众多的例子来说明定义和定理，而某些陈述则只是到后面才指出它们的来由，因此，在学习一般拓扑学的时候，要求读者先相信它，这样才能比较容易地体会这一理论的内在的完美.

I. 直线 $\mathbb{R}$ 上的拓扑

1. 开集、闭集、邻域、集合的界

我们不准备回顾在第三章已经给出的实数集 $\mathbb{R}$ 的定义*).

---

*) 实数集 $\mathbf{R}$ 的定义可从自然数集 $\mathbb{N}$ 出发来给出. 在 $\mathbb{N}$ 上引入加法运算，为使加法有逆运算，$\mathbb{N}$ 就扩充为整数集 $\mathbf{Z}$ 再在 $\mathbf{Z}$ 上引入乘法运算，为使乘法有逆运算，$\mathbf{Z}$ 又扩充为有理数集 $\mathbb{Q}$. 最后，再把 $\mathbb{Q}$ 扩充，要求它满足连续性公理：有上界的集合必定有上确界，那末 $\mathbb{Q}$ 就被扩充为 $\mathbf{R}$.

至于自然数集 $\mathbb{N}$ 可用 Peano 公理定义：1) $\mathbb{N}\neq\phi$；2) 存在映射 S: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$（即"$n\to n+1$"），且 $m\neq n\Rightarrow S(m)\neq S(n)$；3) 存在 $1\in\mathbb{N}\setminus S(\mathbb{N})$；4) $\mathbb{N}$ 为满足 1)，2)，3) 的最小集. ——译者注

定义 1-1 我们称 $\mathbb{R}$ 的子集 A 是开的，是指它是空集或者对任何 $x\in A$，存在含 x 而又包含在 A 内的开区间.

换句话说，$\mathbb{R}$ 中的开集是一些开区间的并.

由这一定义几乎立即可得如下结果：

O_1: 任意（有限或无限）个开集的并是开集；

O_2: 任意有限个开集的交是开集；

O_3: 直线 $\mathbb{R}$ 和空集 ϕ 都是开集.

性质 O_1 可由下述事实得出：如果某集合族的每个集合都是开区间的并，那末它们的并也是一些开区间的并.

为了证明性质 O_2，只需就两个开集 A 和 B 的交的情形来讨论：

由假设 $$A=\bigcup_i A_i,\quad B=\bigcup_j B_j,$$

其中 A_i 和 B_j 都是开区间. 因而

$$A\cap B=(\bigcup_i A_i)\cap(\bigcup_j B_j)=\bigcup_{i,j}(A_i\cap B_j).$$

由于每个 $A_i\cap B_j$ 或是空集或是开区间，故 $A\cap B$ 是开集.

最后，性质 O_3 是明显的.

例 1° 任何开区间是开集. 2° 开区间 $]n,\ n+1[$（其中 $n\in\mathbb{Z}$）的并是开集.

相反，闭区间 $[a,\ b]$ 不是开集.

Z 认为无限个开集的交总是开集，是错误的. 比如，开区间 $\left]-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right[$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 的交退化为单点集 $\{0\}$，而它不是开集.

定义 1-2 我们称 $\mathbb{R}$ 的子集 A 是闭的，是指它的余集 $\underset{\mathbb{R}}{C}A$ 是开集.

从性质 O_1, O_2, O_3 的每一个出发立即可得对闭集的对偶性

质. 我们仅将这些性质陈述如下，而它们的证明是直接可得的：

F_1: 任意个闭集的交是闭集；

F_2: 任意有限个闭集的并是闭集；

F_3: 直线 ℝ 和空集 ϕ 是闭集.

例　任何闭区间 $[a, b]$（其中 $a<b$）是闭集. 事实上，$[a, b]$ 的余集是两个开区间 $]\leftarrow, a[$ 和 $]b, \rightarrow[$ 的并，因而是开集.

Z　应该注意，一个集合可能非开非闭，比如有理数集 ℚ.

定义 1-3　我们把任何含有包含 ℝ 的点 x 的开集的 ℝ 的子集称为点 x 的邻域.

换句话说，V 是 x 的邻域，是指 V 含有包含 x 的开区间.

例如，任何开集 A 是它的每个点的邻域. 反之，任何集合 A，若它是它的每一点的邻域，则 A 是开区间的并，从而是开集.

如果 x 和 y 是任意两个不同的点，且 $x<y$，那末存在 x 的邻域 V_x 和 y 的邻域 V_y，使得 $V_x\cap V_y=\phi$; 事实上，令 z 是 x 和 y 之间的任意点，则只需取

$$V_x=]\leftarrow, z[\text{ 和 } V_y=]z, \rightarrow[.$$

Z　我们刚才给出的"邻域"一词的含义似乎有别于日常生活中"邻近"的含义，因为对于我们来说，ℝ 的点 x 有许许多多邻域，而其中之一甚至就是 ℝ本身.

然而，毋宁说我们已经充实了一个至今还不太精确的概念，因为今后我们已经可以说，点 y 属于点 x 的某个指定的邻域 V，而这个邻域 V 在某种意义下刻划了 x 和 y 的邻近程度.

集合的聚点　设 A 是 ℝ 的子集，ℝ 的点 x_0 称为 A 的聚点，是指 x_0 的任何邻域中，至少存在一个不同于 x_0 的 A 的点.

这样一来，也在 x_0 的任何邻域中存在无限多个不同于 x_0 的 A 的点. 否则，就存在一个包含 x_0 的开区间 $]a, b[$，它只含有有限个 A 的点 (x_i). 这样也就存在一个与 A 至多只有公共点 x_0 的开

区间$]a', b'[$(取 a' 为小于 x_0 的最大的 x_i, 如果这样的 x_i 不存在, 就取 a 作为 a'; 类似地取 b'); 而这由假设是不可能的.

Z 一个集合的聚点不一定属于这一集合. 比如点 0 是点 $x_n=1/n$(n 为 >0 的整数)的集合的聚点, 但并不属于这一集合. 同样, 点 0 和 1 是$]0, 1[$的聚点, 但也不属于这一区间.

命题 1-4 任何闭集包含其所有聚点. 反之, 任何包含其所有聚点的集合是闭集.

设 A 为闭集; 如果 $x\in CA$, 则开集 CA 是 x 的邻域, 且不含 A 中的任何点. 因此, x 不可能是 A 的聚点.

反之, 如果 A 是使 CA 中的任何点不是 A 的聚点的集合, 那末对任何 $x\in CA$ 存在不包含 A 的点的 x 的邻域, 从而此邻域在 CA 中. 因此, CA 是它的每个点的邻域, 即它是开集; 换句话说, A 是闭集.

孤立点 集合 A 的*孤立点*是指 A 中的不是 A 的聚点的点. 换句话说, 这种 A 的点有邻域 V 使得 $A\cap V=\{x\}$.

例 置 $A=[0, 1]\cup\mathbb{N}$; 则 A 的孤立点就是所有整数 $n\geqslant 2$.

上确界与下确界的存在性 我们已经在第一章中定义了所谓序集 E 的子集 A 的上确界*). 这种上确界并非总是存在的, 即使 A 是 E 的有上界子集.

例如, 设 E 为非负有理数形成的全序集, A 为 E 中的满足 $x^2<2$ 的元素 x 的子集. 尽管 A 显然有上界, 但它在 E 中没有上确界.

相反, 第三章中给出的 $\mathbb{R}$ 的定义**)不会导致在 $\mathbb{R}$ 中出现这种

---

*) 集合 E 称为序集是指 E 中定义了一个二元关系$\leqslant$, 满足: 1) $\forall x\in E$, $x\leqslant x$; 2) $\forall x, y\in E$, $(x\leqslant y,\ y\leqslant x)\Rightarrow x=y)$; 3) $\forall x, y, z\in E$, $(x\leqslant y,\ y\leqslant z)\Rightarrow x\leqslant z$. E 的子集 A 的上确界 $c\in E$ 是指 c 满足: 1) $\forall x\in A$, $x\leqslant c$; 2) $\forall d\in E$, $(\forall x\in A,\ x\leqslant d)\Rightarrow c\leqslant d$. 此外, 如果序集 E 还满足: 4) $\forall x, y\in E$, $x\leqslant y$, $y\leqslant x$ 至少有一个成立, 那末 E 称为全序集. ——译者注

**) 参看第 2 页的译者注.

情形. 由于这一性质极为重要，我们在这里重述如下：

$\mathbb{R}$ 的基本性质 $\mathbb{R}$ 的任何有上界(相应地，有下界)子集有上确界(相应地，下确界).

设 A 为 $\mathbb{R}$ 的非空有上界子集，b 为它的上确界. 则半直线 $]\leftarrow, b]$ 包含 A，且显然这是包含 A 的最小负向闭半直线.

对于任何 $x<b$，$[x, b]$ 与 A 相交. 因此，或者 $b\in A$，或者 b 是 A 的聚点.

特别是，当 A 为闭集时，它包含它的上确界 b；于是 b 点是 A 的最大元素.

对于下确界显然也有类似性质.

注 当 A 无下界(相应地，无上界)时，我们有时称 $-\infty$(相应地，$+\infty$)为它的下确界(相应地，上确界). 我们将在稍后给出这一说法的确切含义.

有界集 我们称 $\mathbb{R}$ 的非空子集 A 为有界集，是指它既有上界又有下界，换句话说，A 包含在一个闭区间 $[a, b]$ 中.

根据 $\mathbb{R}$ 的基本性质，A 有界的充分必要条件为它有上确界和下确界. 如果 a_0 和 b_0 是这两个界，那末，闭区间 $[a_0, b_0]$ 是包含 A 的最小闭区间.

如果 A 是有界闭集，则 a_0 和 b_0 属于 A，且分别是 A 的最小元素和最大元素.

直径 对于任何 $A\subset\mathbb{R}$，我们称 A 中两点间距离的上确界 $\delta(A)$ (有限或 $+\infty$) 为 A 的直径.

如果 $\delta(A)$ 有限，则对于任何 $x\in A$，集合 A 有 $(x+\delta(A))$ 和 $(x-\delta(A))$ 分别为它的上界和下界，从而 A 是有界的. 反之，如果 A 有界，且 a 和 $b(a\leqslant b)$ 分别为它的下、上确界，则 A 的直径有限且等于 $(b-a)$.

2. 序列极限. Cauchy 收敛准则

设(a_i) $(i=1, 2, \cdots, n, \cdots)$是 $\mathbb{R}$ 的点的无限序列. 我们说, 这个序列收敛于 l, 或者说, l 是该序列的极限, 是指对于任何 l 的邻域 V, 除去有限个 i 值以外, 均有 $a_i\in V$(显然我们可以只取包含 l 的开区间来作为邻域 V).

这个极限 l 是唯一的. 因为,否则令 l_1 和 l_2 是 $\mathbb{R}$ 的两个不同的点, V_1 和 V_2 是 l_1 和 l_2 的两个不相交的邻域. 如果除去有限个外,对于任何 i 均有 $a_i\in V_1$,则只可能对有限个 a_i, 有 $a_i\in V_2$. 因此,如果 l_1 是该序列的极限, l_2 就不是.

定理 2-1 任何有上界的递增(相应地, 有下界的递减)序列有极限.

事实上,比如假设给定的序列(a_i)递增, 令 A 为点 a_i 的集合. 则这个集合非空且有上界,因而有上确界 l. 但包含 l 的开区间 V 至少包含一个点 a_{i_0}, 从而也包含所有指标 $i>i_0$ 的 a_i. 因此, l 是该序列的极限.

Cauchy 收敛准则 到目前为止,我们只用到了 $\mathbb{R}$ 的序结构,下面我们将首次用到它的群结构.

所谓序列(a_i)收敛于 l, 也就是说, 对于任何 $\varepsilon>0$, 存在整数 n, 使得

$$(i\geqslant n)\Rightarrow(|a_i-l|\leqslant\varepsilon).$$

由此可得

$$(i \text{ 和 } j\geqslant n)\Rightarrow(|a_i-a_j|\leqslant 2\varepsilon).$$

这个不等式的令人注目之处在于它与 l 无关. 我们即将看到, 反之,任何具有这一性质的序列是收敛的. 确切地说,我们有:

定义 2-2 我们说序列(a_i) $(i=1, 2, \cdots, n, \cdots)$为 Cauchy 列,是指当 i 和 j 趋向于 $+\infty$ 时, $|a_i-a_j|$ 趋向于 0, 换句话说, 对

于任何 $\varepsilon>0$, 存在整数 n, 使得

$$(i \text{ 和 } j\geqslant n)\Rightarrow(|a_i-a_j|\leqslant\varepsilon).$$

上述说法也等价于说：令 A_n 为指标 $i\geqslant n$ 的点 a_i 的集合，且置

$$\delta(A_n)=\sup_{x,y\in A_n}|x-y|.$$

那末递减序列 $\delta(A_n)$ 有极限为 0.

定理 2-3(Cauchy 准则) 任何 $\mathbb{R}$ 中的点的 Cauchy 列收敛.

证明 我们已经知道任何 $\mathbb{R}$ 中的点的收敛列是 Cauchy 列，需要建立的是逆命题.

设 (a_i) 为 Cauchy 列. 利用上述记号，$\delta(A_n)$ 趋向于 0. 又设 α_n 和 $\beta_n(\alpha_n\leqslant\beta_n)$ 为 A_n 的下确界和上确界. 由于序列 (A_n) 是递减的(在包含的意义下)，故 α_n 的序列递增，β_n 的序列递减.

递增序列 (α_n) 有 β_1 为上界，因而有极限 α; 同样 (β_n) 有极限 β.

由于 α 和 β 属于所有区间 $[\alpha_n, \beta_n]$, 故有

$$|\beta-\alpha|\leqslant|\beta_n-\alpha_n|$$

从而
$$\beta-\alpha=0.$$

令
$$l=\alpha=\beta.$$

对于任何 n, 有：

$$l\in[\alpha_n, \beta_n], \text{ 且 } a_n\in A_n\subset[\alpha_n, \beta_n],$$

从而
$$|l-a_n|\leqslant\sup\{|l-\alpha_n|, |l-\beta_n|\}.$$

因此，当 $n\to\infty$ 时，$(l-a_n)\to0$, 即序列 (a_n) 恰收敛于 l.

我们经常利用 Cauchy 准则来证明一个序列收敛，并且将把它推广到比实直线更一般的空间中去.

3. 有界闭区间的紧性

有界闭区间的最重要的性质之一是通过 Heine-Borel-

Lebesgue 定理来表述的．这一定理使我们能把对有界闭区间的开覆盖的研究转化为对它的有限子覆盖的研究．由这一定理立即可得另一条以 Bolzano-Weierstrass 定理著称的性质．

定义 3-1 我们把用 $\mathbb{R}$ 的一系列开集来对实直线上的集合 A 进行覆盖称为 A 的开覆盖．

定理 3-2(Heine-Borel-Lebesgue) 有界闭区间 $[a, b]$ 的任何开覆盖必有有限子覆盖．

更明确地说，对于 $\mathbb{R}$ 的任何使

$$[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$$

的开集族 $(\omega_i)_{i \in I}$，存在有限子集 $J \subset I$，使得

$$[a, b] \subset \bigcup_{i \in J} \omega_i.$$

证明 设 $(\omega_i)_{i \in I}$ 为覆盖 $[a, b]$ 的开集族，这里认为 $a<b$，因为当 $a=b$ 时，定理是显然的．

令 A 为 $[a, b]$ 中有下列性质的 x 的全体：区间 $[a, x]$ 可被有限个开集 ω_i 所覆盖．于是定理的证明转化为求证 $b \in A$．而 A 是非空的，因为它包含 a，同时它又有上界 b．这样它就具有属于 $[a, b]$ 的上确界 m．

对于 m 来说，存在 $i_0 \in I$，使得 $m \in \omega_{i_0}$；而 ω_{i_0} 是 m 的邻域，且在这一邻域中，在 m 的左边存在 A 的点 x，使得 $[x, m] \subset \omega_{i_0}$．对于这样的 x，$[a, x]$ 具有有限个 ω_i 的覆盖，从而 $[a, m]=[a, x] \cup [x, m]$ 也有这样的覆盖，但是任何覆盖 $[a, m]$ 的有限个 ω_i 的子族也覆盖某一区间 $[a, m']$，其中 $m'>m$．这与 m 是 A 的上确界的事实仅当 $m=b$ 时才相容．

从现在起，特别要注意定理 3-2 的陈述不能推广到无界区间的情形，或者有界但非闭的情形．比如，开集列

$\left[\frac{1}{n}, 2\right[$（其中 $n\geqslant 2$）覆盖了半开区间 $]0, 1]$，但是这一开集列的任何有限子列都没有同样的性质.

定理 3-3(Bolzano–Weierstrass)　**对于任何有界闭区间 $[a, b]$，$[a, b]$ 的任何无限子集 X 在 $[a, b]$ 上有聚点.**

等价陈述　$[a, b]$ 的任何在 $[a, b]$ 上没有聚点的子集 X 是有限集.

证明　如果 $[a, b]$ 中任一点 x 都不是 X 的聚点，那末任何 x 都具有开邻域 V_x，其中至多包含 X 的一个点，即 x 本身. 这些 V_x 构成 $[a, b]$ 的开覆盖；由上述定理，存在有限个 V_x，比如 $V_{x_i}(i=1, \cdots, n)$，覆盖 $[a, b]$. 因此，X 至多包含 n 个点 $x_i(i=1, \cdots, n)$.

Z　这里再次要注意，定理 3-3 的陈述既不能推广到有界非闭区间，也不能推广到无界区间. 比如半开区间 $]0, 1]$ 中的点 $1/n$ 构成的无限序列在 $]0, 1]$ 上没有聚点. 事实上，它在 $\mathbb{R}$ 上仅有的聚点为点 0，而 0 不属于 $]0, 1]$.

我们现在不准备对直线上的拓扑作更深入的研究. 事实上，直线上的许多拓扑性质对于比直线远为一般的空间也是成立的. 因此，把它们引进分析，并非是人为的，而是对于证明和发现许多性质来说必不可少的.

我们同样只打算给出若干与 Euclide 空间的拓扑有关的若干定义，然后着手研究一般拓扑空间. 在进行后一研究时，思想上经常呈现较为具体的由实直线 $\mathbb{R}$、空间 $\mathbb{R}^n$ 以及它们的子集构成的特殊情形，将是十分有益的. 然后，距离空间将是另一个相当直观的实体，从中我们将吸取一些正、反例子.

4. 空间 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑

我们知道，空间 $\mathbb{R}^n$ 是 n 个恒同于 $\mathbb{R}$ 的空间的乘积，因此是 n

个实数的有序序列$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的集合．但是直到现在为止，我们仅在这个乘积集合中引入代数结构(向量空间)．现在我们将在其上赋以一个拓扑结构．

定义 4-1 设$\omega_i(i=1, 2, \cdots, n)$为$\mathbb{R}$中的开区间$]a_i, b_i[$或空集$\varnothing$，在$\mathbb{R}^n$中，我们称$\mathbb{R}^n$的子集$\omega_1\times\omega_2\times\cdots\times\omega_n$为基是$\omega_i$的开方块(当基之一是空集时，它是空集)．如果它非空，它的中心是坐标为$x_i=(a_i+b_i)/2$的点．

基是(ω_i)，(ω_i')的两个开方块的交为基是$(\omega_i\cap\omega_i')$的开方块．

通过用闭区间代替开区间ω_i，我们可类似地定义闭方块．

定义 4-2 我们称任何开方块的并为$\mathbb{R}^n$的开集．

这样，我们说$\mathbb{R}^n$的子集A是开的，等价的说法是：对于任何$x\in A$，存在包含x而又含于A中的开方块(有必要时，可以使这个方块以x为中心)．

例 $\mathbb{R}^n$的任何开方块是$\mathbb{R}^n$的开集．相反，$\mathbb{R}^2$的直线不是$\mathbb{R}^2$的开集．

可以验证，$\mathbb{R}^n$的开集满足§1的性质O_1, O_2, O_3(在O_3中，将$\mathbb{R}$换为$\mathbb{R}^n$)．O_1, O_3立即可得．我们证明O_2：

如果A和A'是两个开集，则有

$$A=\bigcup_{i\in I}p_i \quad 和 \quad A'=\bigcup_{j\in J}p_j',$$

其中p_i和p_j'是开方块．

于是
$$A\cap A'=\bigcup_{(i,j)\in I\times J}(p_i\cap p_j').$$

而$p_i\cap p_j'$是开方块，因此$A\cap A'$是开集．

用递推法可将这一结果推广到开集的任何有限交．

闭集、邻域、聚点等 在$\mathbb{R}^n$中，我们说某集合是闭集，是指它的余集是开集；我们说集合V是点x的邻域，是指它包含一个含x的开集；我们说点x是集合A的聚点，是指在x的任何邻域中，

至少存在一个不同于 x 的 A 的点.

我们可以在这里详尽研究这些定义的推论，就象我们对 $\mathbb{R}$ 所做过的那样. 但是从现在起，在一个更为一般的框架中来进行这些研究，将是更有教益的. 尽管如此，思想上经常呈现较为具体的由实直线 $\mathbb{R}$、空间 $\mathbb{R}^n$ 及其子集构成的特殊情形，将总是有好处的.

II. 拓 扑 空 间

在我们刚才所作的对 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 的初步研究中，几乎所有的概念都可以从开集出发来定义，并且大部分性质也都可以只利用开集的性质 O_1, O_2, O_3 来得到. 由此就产生了在开集的概念上建立拓扑学的思想. 我们将试图用开集来表达诸如极限、连续等所有经典的拓扑概念，并且从对这些开集的集合所作的一些简单的假设出发，来重新得到尽可能多的经典定理.

5. 开集、闭集、邻域

定义 5-1 设 E 为一集合，$\mathcal{O}$ 是由被称作开集的 E 的子集所组成的集合，并且满足:

O_1: 任意(有限或无限)个开集的并是开集;

O_2: 任意有限个开集的交是开集;

O_3: 集合 E 和空集 $\varnothing$ 是开集;

那末我们称偶$(E, \mathcal{O})$为*拓扑空间*.

我们也说 E 的子集的集合 $\mathcal{O}$ 在 E 上定义了一个拓扑.

在任何集合 E 上，我们都可定义多种拓扑，除非 E 至多只包含一个点. 在这些拓扑中有一个是*离散拓扑*，对于这种拓扑，$\mathcal{O}$ 是 E 的所有子集的集合. 这是 E 上的包含尽可能多的开集的拓扑.

另一个拓扑是*粗拓扑*. 对于这种拓扑 $\mathcal{O}$ 只有两个元素: $\varnothing$ 和

E. 这是 E 上的包含尽可能少的开集的拓扑.

但是一般说来，有意义的拓扑既不是离散拓扑，也不是粗拓扑.

我们将注意到，性质 O_1, O_2, O_3 就是我们在研究直线上的拓扑时曾经明确过的. 值得注意的是，它们对于得到非常丰富的结果来说已经足够. 我们仅当研究分离拓扑空间和紧空间时，将再来对它进行补充.

例 全序集上的拓扑.

设 E 是任意的全序集. 我们称 E 的开区间的任意并为 E 的开集. 换句话说, A 是 E 的开集是指 A 是空的, 或者对于任何 $x\in A$, 存在包含 x 而又含于 A 中的开区间.

这一定义显然只是重复了在第 1 节的 $\mathbb{R}$ 的情形中用过的处理方法.

容易验证, 性质 O_1, O_2, O_3 都是满足的.

在 E 上这样定义的拓扑也称为序拓扑.

特殊情形 设 $\overline{\mathbb{R}}$ 为如下定义的全序集:

$\overline{\mathbb{R}}$ 的点是由 $\mathbb{R}$ 的点再加上两个记为 $-\infty$ 和 $+\infty$ 的补充点所组成. 在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中, 我们说 $x\leqslant y$, 是指或者 x 和 $y\in\mathbb{R}$, 且 $(y-x)$ 非负, 或者 $x=-\infty$, 或者 $y=+\infty$.

容易验证, 这一关系就定义了 $\overline{\mathbb{R}}$ 上的一个全序, 且 $-\infty$ 是它的最小元素, $+\infty$ 是它的最大元素.

赋有这个序并联系上述拓扑的 $\overline{\mathbb{R}}$ 称为完成直线.

定义 5-2 我们称 E 的子集 A 为闭集，是指它的余集 $\underset{E}{C}A$ 是开集.

正如与直线的情形一样，由陈述 O_1, O_2, O_3 通过对偶性立即可得与前者等价的、与 E 的闭集有关的三条陈述 F_1, F_2, F_3:

F_1: 任意(有限或无限)个闭集的交是闭集;

F_2: 任意有限个闭集的并是闭集;

F_3: 空集和空间 E 是闭集.

例如, 对于 E 的离散拓扑, E 的所有子集都同时是开集和闭集; 对于 E 的粗拓扑, 仅有的闭集是$\varnothing$和 E. 如果 E 是全序集, 任何 E 的闭区间对于序拓扑是 E 的闭集.

邻域 **定义 5-3** 我们称 E 的点 x 的邻域, 是指任何包含含 x 的开集的 E 的子集.

通常我们用 $\mathscr{V}(x)$ 表示 x 的邻域 V 的集合.

我们称 E 的子集 A 的邻域, 是指任何包含含 A 的开集的 E 的子集.

开集的特征 由上述定义可得, 开集是它的每一点的邻域. 反之, 如果集合 A 是它的每一点的邻域, 那末它是开的. 事实上, 对于任何 $x\in A$, 存在包含 x 的开集 ω_x, 且它含于 A 中. 因此, 我们有

$$A=\bigcup_{x\in A}\omega_x.$$

这是个开集的并, 从而是开集.

推论 由此可见, 只要对所有 x 知道 x 的邻域, 空间的开集也就都已知. 换句话说, 在同一个集合上, 两种有同样邻域的拓扑是恒同的.

下面是邻域的某些基本性质, 有时它们被当作定义拓扑空间的出发点.

V_1: x 的任何邻域包含 x, 且任何 x 至少有一个邻域;

V_2: 任何包含 x 的邻域的集合是 x 的邻域;

V_3: x 的两个邻域的交是 x 的邻域;

V_4: 如果 V 是 x 的邻域, 那末存在 x 的子邻域 W(即 $W\subset V$), 使得 V 是 W 的每一点的邻域.

头两条性质是直接的. 第三条性质由两个开集的交

是开集可得.

第四条性质最为隐蔽;它表达了下列模糊的观念:与相当邻近于 x 的点相当邻近的所有点也在 x 的邻近. 由假设,存在开集 ω,使得 $x\in\omega$,且 $\omega\subset V$. 但 ω 是它的每一个点的邻域,故 V 是 ω 的每一个点的邻域. 因此,只需取 $W=\omega$.

点的邻域基 为了了解 $\mathscr{V}(x)$,只需了解 $\mathscr{V}(x)$ 中足够多的元素.

定义 5-4 我们说 $\mathscr{V}(x)$ 的子集 $\mathscr{B}$ 构成 $\mathscr{V}(x)$ 的基,是指任何 $V\in\mathscr{V}(x)$ 包含一个元素 $W\in\mathscr{B}$.

知道了 $\mathscr{B}$ 后,$\mathscr{V}(x)$ 的元素 V 就可作为包含 $\mathscr{B}$ 的元素 W 的任意集合来得到.

例 1° 如果 E 是任意空间,对于任何 $x\in E$,包含 x 的开集就构成 $\mathscr{V}(x)$ 的基.

2° 如果 E 是实直线 $\mathbb{R}$(相应地,$\mathbb{R}^n$),任何 E 的点具有一个以 x 为中心、半长为 $1/n$($n>0$,整数)的开区间(相应地,开方块)所构成的邻域基. 因此,任何 E 的点 x 具有可数*)邻域基.

拓扑空间的开集基 **定义 5-5** 我们把满足下列两个等价条件的 E 的开集类 (ω_i) 称为拓扑空间 E 的开集基:

1) 任何 $x\in E$ 有由 ω_i 的子族构成的邻域基;

2) 任何 E 的开集是 ω_i 的子族的并.

这两条性质的等价性直接由定义可得.

例 5-6 实直线 $\mathbb{R}$ 具有由有理端点的开区间构成的可数开集基.

事实上,$\mathbb{R}$ 的每一点有一个由这样的区间构成的邻域基.

---

*) 与自然数集 $\mathbb{N}$ 可一一对应的集合称为可数集. ——译者注

6. 闭包、内部、边界

附着点、聚点、孤立点.

定义 6-1 设 A 为 E 的子集, $x\in E$.

我们称 x 附着于 A, 是指 x 的任何邻域包含 A 的点.

我们称 x 是 A 的聚点, 是指 x 的任何邻域包含 A 的不同于 x 的点.

我们称 x 是 A 的孤立点, 是指它属于 A, 但不是 A 的聚点, 换句话说, 存在 x 的一个邻域, 其中除 x 外不含 A 中的其它点.

这样, x 附着于 A 就等价于: 或者 x 是 A 的聚点, 或者 x 是 A 的孤立点.

我们将称 E 的附着于 A 的点的全体为 A 的附着集.

例如, 在 $\mathbb{R}$ 中, $\mathbb{Q}$ 的附着集就是 $\mathbb{R}$ 自己; 端点不同的区间 $]a, b[$ 的附着集为 $[a, b]$; 点 $1/n(n=1, 2, \cdots)$ 的集合的附着集是这个集合再加上点 0.

集合的闭包 对于任何 $A\subset E$ 存在一些包含 A 的闭集(例如 E 本身). 根据性质 F_1, 它们的交仍是包含 A 的闭集, 且这是其中最小的一个. 由此, 有以下定义:

定义 6-2 我们把包含 A 的最小闭集称为 A 的闭包, 记为 $\overline{A}$.

命题 6-3 对于任何集合 A, A 的附着集和闭包是恒同的.

事实上, 如果 A 是空间 E 的子集, x 表示 E 的任意点, 则性质:

$$(x\notin\overline{A})\ \text{和}\ (x\ \text{不附着于}\ A)$$

都能解释为存在 x 的开邻域 ω 不与 A 相交.

系 1° 关系式 $A=\overline{A}$ 刻划了闭集的特征; 2° A 为闭集的充要条件是它包含它的所有聚点.

证明 1° 如果 A 是闭集，则它显然等于它的闭包. 反之，由 $A=\overline{A}$ 可得 A 是闭的，因为任何闭包由定义是闭集.

这里可注意到，对于任何 A，有 $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$.

2° 设 A' 是 A 的聚点集. 根据附着集的定义，我们有 $\overline{A}=A\cup A'$. 因此，说 $A=\overline{A}$ 等于说 $A=A\cup A'$ 或 $A'\subset A$.

集合的内部 闭包的"对偶"概念(在第一章的公式 12-2 的意义下*))是内部的概念:

定义 6-4 我们把所有包含在 E 的子集 A 内的开集的并(可能是空的)称为 A 的内部. 因此这是包含在 A 内的最大开集；记它为 $\mathring{A}$.

直接可得，关系式 $A=\mathring{A}$ 刻划了开集的特征.

拓扑运算 $\mathring{A}$, $\overline{A}$ 及初等运算之间的关系

1° 闭包和内部之间的对偶性:

1) $$C\mathring{A}=\overline{CA}.$$

事实上，由定义

$$\mathring{A}=\bigcup_{i\in I}\omega_i,$$

这里 $(\omega_i)_{i\in I}$ 表示所有包含在 A 内的开集的族. 因此,

$$C\mathring{A}=\bigcap_{i\in I}C\omega_i=\bigcap_{i\in I}\varphi_i,$$

其中 $(\varphi_i)_{i\in I}$ 表示包含 CA 的闭集的族，从而 $C\mathring{A}$ 是 CA 的闭包.

2) $$C\overline{A}=\mathring{C}A.$$

这个公式由在上述公式内用 CA 代替 A 而推得.

2° 闭包的性质:

1) $\overline{\phi}=\phi$; 2) $A\subset\overline{A}$;

---

*) 这里说的公式是指集合运算的 De Morgan 公式:

$$C(\bigcup_i A_i)=\bigcap_i CA_i.$$

所谓"对偶"概念是指从集合类来看是"相余"的概念. 例如开集的对偶概念是闭集. ——译者注

3) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$;　　　4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

前两个关系式是直接可得的; 第三个结果由任何闭集的闭包恒同于自己而得.

为了证明第四个关系式, 首先注意到

$$(X\subset Y)\Rightarrow(X\subset\overline{Y})\Rightarrow(\overline{X}\subset\overline{Y});$$

由此导得 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$, 从而

$$\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B};$$

反之, $\overline{A}\cup\overline{B}$ 是包含 A 和 B 的闭集, 因而也是包含 $A\cup B$ 的闭集, 故

$$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}.$$

这一重要关系式显然可以推广到任何有限并的情形. 相反, 它不能推广到无限并的情形, 因为闭集的任意并并非总是闭集.

对于交不再有类似的关系式, 即使对有限交也如此. 例如, 设 E 为直线 $\mathbb{R}$, A 和 B 分别表示有理数集和无理数集, 则有 $\overline{A}\cap\overline{B}=\mathbb{R}$, 而 $\overline{A\cap B}=\phi$. 我们只能有包含关系 $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.

同样, 对于 E 的任何子集族 (A_i), 我们有包含关系:

$$\bigcup\overline{A_i}\subset\overline{(\bigcup A_i)}\quad\text{和}\quad\overline{(\bigcap A_i)}\subset\bigcap\overline{A_i}.$$

3° 内部的性质　它们是闭包性质的对偶:

1) $\mathring{E}=E$;　　　2) $\mathring{A}\subset A$;

3) $\mathring{\mathring{A}}=\mathring{A}$;　　　4) $(A\cap B)^{\circ}=\mathring{A}\cap\mathring{B}$.

集合的边界　**定义 6-5**　E 的子集 A 的边界 A^* 是所有这样的点 x 的集合: x 的任何邻域 V 至少包含 A 中的一点和 CA 中的一点.

因而有　　　$$A^*=\overline{A}\cap\overline{CA}.$$

在这一公式上我们看到任何集合的边界是闭集, 而两个互余的集合有相同的边界.

命题 6-6 对于 E 的任何子集 A, 有 $A^* = \overline{A} \dot{-} \mathring{A}$.

事实上, 我们有关系式:

$$A^* = \overline{A} \cap \overline{\complement A} \text{ 和 } \overline{\complement A} = \complement \mathring{A}, \text{ 故 } A^* = \overline{A} \cap \complement \mathring{A},$$

这恰好是所求的关系式.

系 对于 E 的任何闭集 A, 有以下等价关系:

$$(A = A^*) \Leftrightarrow (\mathring{A} = \phi) \Leftrightarrow (\overline{\complement A} = E).$$

例 在 $\mathbb{R}$ 中, $\mathbb{Q}$ 的边界是 $\mathbb{R}$; 而 $\mathbb{R}$ 本身的边界倒是空的; $]0,1[$ 或 $[0, 1]$ 的边界是集合 $\{0, 1\}$.

处处稠集、稠集和疏集 在实直线上, 在任何非空开集中有有理数.

相反, $\mathbb{R}$ 的任何非空开集包含不含任何整数的非空子开集. 为了使由 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的分布之间的区别所引起的模糊观念明确化, 我们引入以下定义:

定义 6-7 设 A 为空间 E 的子集.

我们说 A 在 E 中处处稠、稠或疏, 分别是指:

$\overline{A} = E$; $\overline{A}$ 有非空内部; $\overline{A}$ 的内部为空集.

例如, 在 $\mathbb{R}$ 中, 集合 $\mathbb{Q}$ 处处稠; 集合 $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ 稠; 集合 $\mathbb{Z}$ 疏, 同样, 数 $1/n$ 的集合(其中 $n=1, 2 \cdots$)也是疏的.

注意, 有些数学家所用的术语"稠"是指这里的"处处稠".

直接的性质(由命题 **6-6** 的系可得)

1° 如果 A 在 E 上处处稠, 且 $A \subset B \subset E$, 那末 B 也在 E 上处处稠.

2° (A 处处稠)$\Leftrightarrow$(E 的任何非空开集与 A 相交).

3° (A 疏)$\Leftrightarrow$($\overline{A}$ 疏)$\Leftrightarrow$($\complement \overline{A}$ 处处稠) $\Leftrightarrow$ (E 的任何非空开集包含与 A 不相交的非空子开集).

4° 如果 A 与 B 在 E 上疏, 则集 $A \cup B$ 在 E 上也疏.

最后一条性质可推广到任意有限并情形, 但不能推广到无限

并(考虑 $\mathbb{R}$ 上的集合 $\mathbb{Q}$).

Z 如果 A 疏, 则 CA 处处稠, 但完全可能 A 和 CA 都处处稠: $\mathbb{R}$ 的子集 $\mathbb{Q}$ 及其余集就是这种情形.

同一个例子也说明, A 和 B 在其交 $A\cap B$ 为空集时, 仍然可以都是 E 的处处稠集.

命题 6-8 任何有可数开集基的空间 E 是可分的(其意义为 E 包含可数处处稠子集).

事实上, 设 (ω_n) 为给定的基, 且对于任何 n, 有 $\omega_n\neq\varnothing$; x_n 为 ω_n 的点. 则 x_n 的集合 X 在 E 上是处处稠的, 因为如果 ω 是 E 的任意非空开集, 则 ω 是某些非空 ω_n 的并, 从而包含对应的 x_n; 换句话说, $(X\cap\omega)$ 不是空的.

7. 连续函数. 同胚

为了能够谈论集合 X 到集合 Y 的映射 f 的连续性, 需要在 X 和 Y 上定义邻近点的概念, 即 X 和 Y 必须是拓扑空间.

对单实变量数值函数连续性的经典定义进行分析可导致下列定义:

点上的连续性　定义 7-1 我们称拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射 f 在 X 的点 x_0 上连续, 是指对于 $f(x_0)$ 的任何邻域 V, 存在 x_0 的邻域 v, 使得它通过 f 的象在 V 中, 即 $f(v)\subset V$.

用逻辑记号这个定义可写成:

$$(f\text{ 在 }x_0\text{ 上连续})\overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow}(\forall V,\ V\in\mathscr{V}(f(x_0)))(\exists v,\ v\in\mathscr{V}(x_0)):\\(f(v)\subset V).$$

显然, 我们可要求 V 和 v 分别在 $f(x_0)$ 和 x_0 的给定的邻域基内, 而仍得到等价定义.

下面是 f 在 x_0 上连续的另一种方便的叙述方式: 对于 $f(x_0)$

的任何邻域 V, $f^{-1}(V)$*) 是 x_0 的邻域. 事实上, 设 V 是 $f(x_0)$ 的邻域; 如果 v 是 x_0 的满足 $f(v)\subset V$ 的邻域, 那末有 $v\subset f^{-1}(V)$, 从而包含 x_0 的一个邻域的 $f^{-1}(V)$ 也是 x_0 的邻域; 反之, 如果 $f^{-1}(V)$ 是 x_0 的邻域, 置 $v=f^{-1}(V)$, 就有 $f(v)\subset V$. 这里我们还是可以要求 V 属于 $f(x_0)$ 的给定的邻域基.

例 1° 如果 f 是 X 到 Y 的常值映射, 那末对于 $f(x_0)$ 的任何邻域 V, 有 $f^{-1}(V)=X$; 因此, 任何 X 到 Y 的常值映射在 X 的所有点上连续.

2° X 到 X 的恒等映射 $x\to x$ 在 X 的所有点上连续.

整个空间上的连续性 **定义 7-2** 我们说 X 到 Y 的映射 f 在 X 上连续, 是指它在 X 的所有点上都连续.

定理 7-3 f 在 X 上连续等价于对于 Y 的任何开集 B, $f^{-1}(B)$ 是 X 的开集.

事实上, 假设 f 在 X 上连续; 如果 B 是 Y 中的开集, 由于 B 是它的每一点的邻域, 故 B 的逆象也是 B 的逆象的每一点的邻域, 因而也是开集.

反之, 假设 $f^{-1}(B)$ 对于任何 Y 中的开集 B 是开集; 那末对于任何 x_0 和 $f(x_0)$ 的邻域 V, $f^{-1}(\mathring{V})$ 是包含 x_0 的开集, 从而 $f^{-1}(V)$ 更是 x_0 的邻域. 因此 f 在 X 的所有点 x_0 上连续.

定理 7-4 f 在 X 上连续等价于对于 Y 的任何闭集 B, $f^{-1}(B)$ 是 X 的闭集.

这一定理可通过应用关系式

$$f^{-1}(CB)=Cf^{-1}(B)$$

而由上一定理导得.

系 如果 f 是 X 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射, 那末 X 中使 $f(x)=0$ 的

---

*) 集合 $f^{-1}(V)$ 定义为: $\{x\in X: f(x)\in V\}$. 如果把 f^{-1} 理解为 Y 到 X 的映射, 那末它一般不是单值的, 而是多值的, 或者说是"集值映射". ——译者注

点 x 的集合是 X 的闭集.

对于形为 $f(x)\geqslant 0$, $f(x)\leqslant 0$, $f(x)>0$, $f(x)<0$ 的关系式的解,我们将有类似的陈述.

特别是, 如果 f 是 n 个变量的实系数多项式, 这一系指出, $f(x)=0$ 的解所形成的实代数流形是 $\mathbb{R}^n$ 的闭集; 对于 n 个复变量的多项式,在 $\mathbb{C}^n$ 中有同样结果.

Z 必须注意的是,在定理 7-3 和 7-4 中陈述的两条 f 的连续性的特征都是利用了 f 的逆象,而不是 f 的直接象.

事实上, X 的开集通过连续映射后的象仅在很特殊的情况下才是 Y 的开集. 例如,$\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的常值映射 $x\to 0$ 把 X 的任何非空开集都不变成开集.

同样, X 的闭集通过连续映射后的象也可以不是 Y 的闭集: 例如, $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $x\to 1/(x^2+1)$ 把 $\mathbb{R}$ 变为 $\mathbb{R}$ 中的非闭集 $]0, 1]$.

现在这里有一条用直接象来表达的 f 的连续性的特征:

定理 7-5 X 到 Y 的映射 f 连续等价于对于任何集合 $A\subset X$,有 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

事实上,如果 f 连续, 关系式 $A\subset f^{-1}(f(A))\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ 指出,$\overline{A}\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$,从而 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

反之, 如果这一关系式对于任何 $A\subset X$ 成立, 我们指出集合 $A=f^{-1}(B)$ 对于 Y 的任何闭集 B 都是闭集, 从而也就证明了 f 连续:

我们有 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}\subset\overline{B}=B$, 从而 $\overline{A}\subset f^{-1}(B)=A$, 因此, $\overline{A}=A$; 换句话说, A 是闭集.

连续映射的传递性 设 X, Y, Z 为三个拓扑空间, f 为 X 到 Y 的映射, g 为 Y 到 Z 的映射, $h=g\circ f$.

又设 $x_0\in X$; 置 $y_0=f(x_0)$, $z_0=g(y_0)=g(f(x_0))=h(x_0)$.

命题 7-6 如果 f 在 x_0 连续，g 在 y_0 连续，那末复合映射 $h=g\circ f$ 也在 x_0 连续.

事实上，设 V 为 z_0 的任意邻域. 由 g 在 y_0 连续可推得 $g^{-1}(V)$ 是 y_0 的邻域；于是由 f 在 x_0 连续又可推得 $f^{-1}(g^{-1}(V))=h^{-1}(V)$ 是 x_0 的邻域.

特别是，如果 f 在 X 上连续，g 在 Y 上连续，那末 $h=g\circ f$ 也在 X 上连续.

例 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $u\to|u|$ 连续；因此对于任何 X 到 $\mathbb{R}$ 上的连续映射 f，由 $x\to|f(x)|$ 定义的 X 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $|f|$ 也连续.

同胚 如果存在 X 到 Y 的双射 f，使得 X 和 Y 的开集互换，即对于 X 的任何开集 A，$f(A)$ 为 Y 的开集，而对于 Y 的任何开集 B，$f^{-1}(B)$ 为 X 的开集，那末我们自然说，这两个拓扑空间是同构的. 这种同构我们称为同胚.

很明显，一个同胚的逆还是同胚，而两个同胚的乘积也是同胚. 特别是，一个空间到其自身的所有同胚形成一个群*).

短评 同胚的概念是拓扑学中的基本概念，因为同胚无非是说明拓扑结构间的同构关系；在拓扑学中，这是一种最基本的等价关系.

当两个拓扑空间同胚时，所有对一个拓扑空间成立的性质对另一个也成立；这样我们可以把它们看作同一类几何实体的两个代表.

当集合 E 具有包括拓扑结构在内的多种结构(其他的可能是代数结构、距离结构等)时，我们说 E 的某个性质是拓扑性质，是指这条性质对于所有与 E 拓扑同胚的空间都成立. 例如，$\mathbb{R}$ 包含

*) 集合 G 称为群，是指其上定义了代数运算 $\circ$: $\forall x, y\in G: x\circ y\in G$，满足 i) $\forall x, y, z\in G: (x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$; ii) $\exists e\in G, \forall x\in G: ex=xe=x$; iii) $\forall x\in G, \exists x^{-1}\in G: x^{-1}x=xx^{-1}=e$.

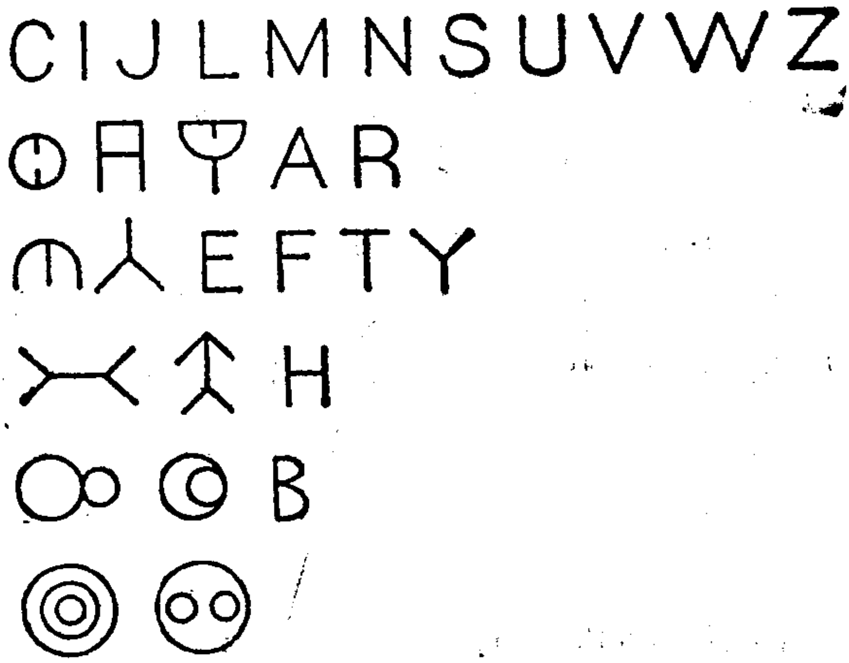
拓扑空间到自身的所有同胚对于复合运算形成群. ——译者注

可数的处处稠子集就是一条拓扑性质．只要我们略为习惯了，一般容易辨别一条性质是否是拓扑性质．在任何情形，只要是用开集以及由它导出的概念：闭集、邻域、聚点、处处稠等来陈述的性质，总是拓扑性质．

下面我们不加证明，也不作精确说明来给出一系列例子，用以帮助理解同胚的直观内容．图中前面几行里我们都给出一个或几个图形及与这些图形同胚的一些大写字母．

截头圆锥的表面与球冠同胚．

半球面与 $\mathbb{R}^2$ 的闭方块同胚．



当涉及空间 $\mathbb{R}^3$ 的曲面时，把这些曲面想象为橡皮做的，就能使我们对同胚有一个相当好的观念．同胚这时就是这些曲面无撕裂、无重叠、无贴合的拉长压缩变形．然而这种直观方法可能是不可靠的，在任何情况下，它都不能代替正确的推理．

同胚性证明的例子　设 X 和 Y 是两个同构的全序集，f 是 X 到 Y 的双射，且它对于序结构是同构（换句话说，f 是递增双射）．那末，f 对于 X 和 Y 上的联系它们的序的拓扑也是同胚．

事实上，f 交换 X 和 Y 的开区间，从而也就交换它们中的开

集，因为开集是由开区间构成的.

特殊情形　映射 f: $x\to x/(1+|x|)$ 是 $\mathbb{R}$ 到 $]-1, 1[$ 上的双射；置

$$f(-\infty)=-1,\ f(+\infty)=1,$$

则这一映射就被完备化为 $\overline{\mathbb{R}}$ 到 $[-1, 1]$ 上的递增双射. 于是具有序拓扑的 $\overline{\mathbb{R}}$ 和 $[-1, 1]$ 是同胚的.

现在我们证明一条判断同胚性的方便的一般准则：

定理 7-7　为使空间 X 到空间 Y 上的双射 f 是同胚，必需且只需它是双方连续的，即 f 和 f^{-1} 都连续.

事实上，f 和 f^{-1} 都连续等价于任何 Y 的开集的逆象是开集，且任何 X 的开集的直接象也是开集.

例　$\mathbb{R}^n$ 中的位移是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 上的同胚；更一般的膨胀变换

$$x\to\lambda x+a\quad(\lambda\neq 0)$$

也是同胚.

Z　从某些特例的初略研究可能使人认为，空间 X 到空间 Y 的任何连续双射 f 都是双方连续的. 我们稍后将会看到，尽管在某些情形确实如此(参看紧空间部分)，但这并非是一个一般事实. 下面是几个例子：

例　1°　Y 是实直线 $\mathbb{R}$；X 也是以 $\mathbb{R}$ 的元素为元素，但是赋有离散拓扑. X 到 Y 上的映射 f 是恒等映射 $x\to x$. 它显然是连续的，但并非双方连续.

2°　X 和 Y 是 $\mathbb{R}$ 的两个子集，其拓扑是由 $\mathbb{R}$ 的拓扑产生的诱导拓扑(参看第 9 节)；X 由区间 $[0, 1[$ 和点 2 所构成；Y 是区间 $[0, 1]$. 最后，f 定义为：当 $x\in[0, 1[$，$f(x)=x$，而 $f(2)=1$.

直接可得这个映射是连续双射，但 f^{-1} 在点 1 不连续.

这两个例子足以说明，即使 f 是连续双射，由 f 使点"靠拢"的事实可导致 f^{-1} 不连续；更确切地说，在 X 中可能存在这样的

集合 A，它不是点 a 的邻域，而 $f(A)$ 却是 $f(a)$ 的邻域.

8. 极 限 概 念

序列的极限　定义 8-1　设 (a_i) $(i=1, 2, \cdots, n, \cdots)$ 为空间 E 的点列. 我们说，这个序列收敛于 E 的点 a，或者说，a 是该序列的极限，是指对于点 a 的任何邻域 V，存在整数 i_0，使得对于任何 $i \geqslant i_0$，有 $a_i \in V$.

简记为 $(\forall V, V \in \mathscr{V}(a))(\exists i_0, i_0 \in \mathbb{N})(\forall i, i \geqslant i_0)$：$(a_i \in V)$. 这一条件也可表达为：对于点 a 的任何邻域 V，除了至多有限个 i 值以外，有 $a_i \in V$.

直接可得，当序列 (a_i) 收敛于 a 时，它的任何无限子列也收敛于 a.

如果空间 E 是任意的，一个序列可能具有多个极限点；例如，当 E 的拓扑是粗拓扑时，E 的所有点都是任何点列 $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ 的极限.

但当 E 是下列意义下的分离空间时，我们可以肯定极限是唯一的：

定义 8-2　我们说空间 E 是分离的，是指 E 的任意两个不同的点都具有两个不相交的邻域.

最常用的空间总是分离的；例如直线 $\mathbb{R}$ 就是分离的（参看 § 1）.

在分离空间中，点 a 的闭邻域的交必退化为一点. 事实上，对于任何 $b \neq a$，存在两个分别包含 a 和 b 的不相交的开集 ω_a，ω_b，从而 $C\omega_b$ 是 a 的不包含 b 的闭邻域.

特别是，任何集合 $\{a\}$ 是闭的，因为它是它的所有闭邻域的交.

命题 8-3　分离空间的任何点列至多只有一个极限点.

证明完全是对 $\mathbb{R}$ 情形给出的证明的重复.

序列的附着值　实数列 $a_n=(-1)^n$ 不收敛，然而数 1 和 -1

似乎可看作广义极限．对这个观念的分析导致下列定义：

定义 8-4 设(a_i) $(i=1, 2, \cdots)$是空间 E 中的点列．我们说 E 的点 a 是这个点列的**附着值**，是指对于 a 的任何邻域 V，存在一些任意大的指标 i，使得 $a_i \in V$.

如果我们以 A_n 表示指标 $i \geqslant n$ 的点 a_i 的集合，我们还可以说，a 是附着值，是指对于任何 n，点 a 属于 A_n 的附着集．

序列$(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$的附着值集因而就是

$$A=\bigcap_1^{\infty} \overline{A}_n.$$

这个集合是闭集，但可能是空集：例如在 $\mathbb{R}$ 中，序列$(a_n=n)$没有任何附着值．

如果序列的所有点 a_i 都属于 E 的闭子集 F，我们也有 $A\subset F$；事实上 $A_n\subset F$，从而 $\overline{A}_n\subset F$，以至 $A\subset F$.

在分离空间中，如果序列(a_i)收敛于 a，这个点就是序列唯一的附着值．事实上，设 $b\neq a$，V_b，V_a 为这两个点的不相交的邻域．于是存在 n 使得 $A_n\subset V_a$；由于 $A_n\cap V_b=\varnothing$，点 b 不是序列的附着值．

相反，即使在分离空间中，一般说来，断言"有唯一的附着值的序列就收敛于这个值"是不对的．例如在 $\mathbb{R}$ 中，序列$(1/2, 2, 1/3, 3, \cdots, 1/n, n, \cdots)$以点 0 为唯一的附着值，但它并不收敛于 0.

注 为了对序列(a_n)的附着值集有更确切的观念，我们可以验证，它是两个集合的并：一部分是点 a_n 的集合 X 的聚点集，另一部分是序列的重复点集，即有无限个指标 n 满足 $x=a_n$ 的点 x 的集合．

关于滤子基的极限与附着值 经典分析并非只是对序列定义极限概念：例如，函数 $x^2/(x^2+1)$ 当 x 趋向于 ∞ 时趋向于 1；$(1/x^2$

$+1/y^2$)当 x 和 y 趋向于 ∞ 时趋向于 0; $\sin x/x$ 当 x 由不等于 0 的值趋向于 0 时趋向于 1.

我们即将看到,在上述例子中涉及到的所有极限概念都是一种一般概念的特殊情形.

定义 8-5 设 E 是任意集合. 我们称 E 的子集的集合 $\mathscr{B}$ 为 E 上的滤子基,是指:

1° 对于任何 $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$,存在 $B_3 \in \mathscr{B}$,使得 $B_3 \subset B_1 \cap B_2$;

2° 所有 $\mathscr{B}$ 的元素 B 都非空.

由这一定义可得 $\mathscr{B}$ 的有限个元素的交总是非空的.

例 1° $E=\mathbb{N}$, $\mathscr{B}$ 的元素是 E 的形为 $\{n, n+1, \cdots\}$ 的子集.

2° $E=\mathbb{N}^2$, $\mathscr{B}$ 的元素是 E 的子集 B_n, 其中 B_n 为使 $p \geqslant n$, $q \geqslant n$ 的数对 (p, q) 的集合.

3° $E=\mathbb{R}$, $\mathscr{B}$ 的元素是 $\mathbb{R}$ 的区间 $[a, \rightarrow[$.

4° E 是拓扑空间,$\mathscr{B}$ 是 E 的点 a 的邻域基.

5° E 是拓扑空间; A 表示 E 的非空子集, a 表示 A 的附着点.

$\mathscr{B}$ 的元素是形为 $A \cap V$ 的集合, 其中 V 是 a 的任意邻域(我们甚至可要求 V 属于 a 的邻域基).

定义 8-6 设 f 为集合 X 到拓扑空间 Y 的映射; $\mathscr{B}$ 是 X 上的滤子基; b 是 Y 的点.

我们说 f 沿 $\mathscr{B}$ 收敛于 b(或有极限 b), 是指对于任何 b 的邻域 V,存在 $B \in \mathscr{B}$,使得 $f(B) \subset V$,

这时记作

$$\lim_{\mathscr{B}} f = b.$$

特别是,当 $X=Y$, 且 f 是 X 到 X 的恒等映射时, 我们就说滤子基 $\mathscr{B}$ 收敛于 b.

例 1° 设 (a_n) 为 Y 的点列; 我们以 f 表示 $\mathbb{N}$ 到 Y 的映射

$n\to a_n$, 以 $\mathscr{B}$ 表示 $\mathbb{N}$ 的余集为有限集的子集全体. 于是定义 8.6 重合于定义 8.1.

2° 如果 X 是拓扑空间, $\mathscr{B}$ 表示 X 的点 a 的邻域全体, 那末 $f(a)$ 是 f 沿 $\mathscr{B}$ 的极限等价于 f 在点 a 连续.

注意, 有时我们用记号 $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(x)$ 来代替 $\lim\limits_{\mathscr{B}} f$, 特别当 $f(x)$ 有简单表达式以及 f 没有一种经典记号时更是如此; 比如对于初等函数 $x\to x^n$ 和 $x\to|x|$ 就是如此.

命题 8-7 如果 Y 是分离空间, 那末 f 沿 $\mathscr{B}$ 至多只能有一个极限.

事实上, 假设 b 和 b' 是 f 沿 $\mathscr{B}$ 的极限. 对于 b, b' 的任何邻域 V, V', 存在 B, $B'\in\mathscr{B}$, 使得

$$f(B)\subset V,\ f(B')\subset V'.$$

由于 $B\cap B'$ 非空, 从而 $f(B)\cap f(B')$ 也非空, $V\cap V'$ 当然更是非空. 因为 Y 是分离空间, 这仅当 $b=b'$ 时才有可能.

定义 8-8 设 f 为 X 到拓扑空间 Y 的映射, $\mathscr{B}$ 是 X 上的滤子基.

我们说 Y 的点 b 是 f 沿 $\mathscr{B}$ 的附着值, 是指对于任何 $B\in\mathscr{B}$ 和 b 的邻域 V, $f(B)$ 与 V 相交.

这等价于说, 对于任何 $B\in\mathscr{B}$, 有 $b\in\overline{f(B)}$, 或

$$b\in\bigcap_{B\in\mathscr{B}}\overline{f(B)}.$$

因而这种 b 的集合(称为 f 沿 $\mathscr{B}$ 的附着集)就是集合

$$\bigcap_{B\in\mathscr{B}}\overline{f(B)};$$

它显然是闭的, 我们将记它为 $\bar{f}(\mathscr{B})$.

正如序列的情形那样, 可以验证, 如果 Y 是分离的, f 沿 $\mathscr{B}$ 收敛于 b, 那末 b 是 f 沿 $\mathscr{B}$ 的唯一的附着值.

特殊情形 8-9 函数在一点上的极限和附着值. 我们现在假

设 X 是拓扑空间；A 是 X 的非空子集，$a\in\bar{A}$；同时又以 $\mathscr{B}$ 表示 X 的形为 $A\cap V$ 的子集的集合，其中 V 是 a 的任意邻域.

于是我们说当 x 在 A 上趋向于 a 时 f 有极限 b，是指

$$b=\lim_{\mathscr{B}} f$$

成立.

例 如果 $X=\mathbb{R}$, $A=]a,\to[$, 我们以 $f(a_+)$表示 f 沿 $\mathscr{B}$ 可能有的极限(即**右极限**). 同样也可定义左极限 $f(a_-)$.

当 $a\in A$, 且 $\lim\limits_{\mathscr{B}} f$ 存在，那末这个极限在 Y 分离时只可能是 $f(a)$.

用同样方式我们也可定义当 x 在 A 上趋向于 a 时 f 的附着值.

9. 拓扑空间的子空间

设 E 为拓扑空间，A 为 E 的子集.

在 A 上所有可以定义的拓扑中，我们研究使 A 到 E 的恒等映射 f 连续的拓扑. E 的开集对这一映射的逆象无非就是该开集与 A 的交. 因此，为使典则映射 f 连续，必须且只需 A 的拓扑的开集全体包含所有这些交.

然而，直接可知 E 的开集在 A 上的迹满足公理 O_1, O_2, O_3. 这就是我们下面要考虑的用它们来定义的 A 上的拓扑.

定义 9-1 对于拓扑空间 E 的任何子集 A, 如果 A 被赋以用 E 的开集在 A 上的迹来定义开集的拓扑，那末称 A 为 E 的子空间.

我们也说 A 的拓扑是由 E 的拓扑所诱导的，或者说是 E的拓扑的迹.

于是 A 到 E 的恒等映射是连续的.

子空间上的闭集和邻域 设 ω 为 E 的开集. 公式

$$A - A\cap\omega = A\cap C\omega$$

指出子空间 A 的闭集无非就是 E 的闭集在 A 上的迹.

同样, 在子空间 A 上, A 的点 a 的邻域也就是集合 $A\cap V$, 其中 V 是 a 在 E 中的邻域.

Z 必须非常小心, E 的子空间 A 的开集(相应地, 闭集)不一定是 E 的开集(相应地, 闭集). 这一注记由下列命题精确化:

命题 9-2 为使 E 的子空间 A 的任何开集(相应地, 闭集)是 E 的开集(相应地, 闭集), 必需且只需 A 是 E 上的开集(相应地, 闭集).

事实上, 如果 A 是 E 上的开集, 则 E 的任何开集在 A 上的迹也是 E 上的开集. 反之, 如果 E 的任何开集在 A 上的迹是 E 上的开集, 则 E 在 A 上的迹也是开集, 即 A 本身是开集.

把"开集"这一词换为"闭集", 我们就有平行的推理.

子空间的传递性 **命题 9-3** 设 X 为拓扑空间, Y 为 X 的子空间, Z 为 Y 的子集. 那末由 X 的拓扑和由 Y 的拓扑在 Z 上诱导的拓扑是一样的.

事实上, 子空间 Y 的开集是形为 $Y\cap\omega$ 的集合, 其中 ω 是 X 的开集. 因此, 对于由 Y 的拓扑诱导的拓扑, Z 的开集是形为 $Z\cap(Y\cap\omega)$ 的集合; 而这样的集合无非就是 $Z\cap\omega$; 所以对于 X 的拓扑和 Y 的拓扑在 Z 上诱导的拓扑, 开集是一样的.

命题 9-4 设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Z 的子空间 Y 的映射.

f 在 X 的点 a 上连续, 等价于把 f 看作 X 到 Z 的映射时, f 在 a 上连续.

事实上, $f(a)$ 在 Y 上的邻域是集合 $V\cap Y$, 其中 V 是 $f(a)$ 在

Z 上的邻域，而由于 $f(X)\subset Y$，我们有

$$f^{-1}(V)=f^{-1}(V\cap Y).$$

命题 9-5 设 f 为空间 X 到空间 Y 的映射. 如果 f 在点 a 上连续，那末 f 在含 a 的任何子空间 A 上的限制也在点 a 上连续.

事实上，令 g 为 f 在 A 上的限制；对于任何 $f(a)$ 在 Y 上的邻域 V，有

$$g^{-1}(V)=A\cap f^{-1}(V).$$

因此，当 $f^{-1}(V)$ 是 a 在 X 上的邻域时，$g^{-1}(V)$ 是 a 在 A 上的邻域.

相反，g 在 a 上连续，而 f 在 a 上不连续的情况是有可能的. 例如，f 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射，它在 $\mathbb{Q}$ 上为 0，在 $C\mathbb{Q}$ 上为 1，则 f 在 $\mathbb{R}$ 的所有点上不连续，然而 f 在 $\mathbb{Q}$ 上的限制是连续的（f 在 $C\mathbb{Q}$ 上的限制也连续）.

尽管如此，在一种重要情形，g 在 a 上的连续性等价于 f 的连续性；这就是 A 为 a 的邻域时的情形. 事实上，这时如果 $A\cap f^{-1}(V)$ 是 a 在 A 上的邻域，那末它同样也是 a 在 X 上的邻域，因此 $f^{-1}(V)$ 更是 a 在 X 上的邻域.

我们把这种等价性说成是映射在一点上的连续性是局部性质.

命题 9-6 分离空间的任何子空间是分离的.

事实上，设 A 是分离空间 X 的子空间. 对于任何 $x, y\in A$，$x\neq y$，在 X 上存在这两个点的不相交的邻域 V_x，V_y. 集合 $A\cap V_x$ 和 $A\cap V_y$ 构成 x，y 在子空间 A 上的两个邻域，且它们也不相交.

应用 子空间的概念是一种定义和研究新拓扑空间的方便手段. 这样，任何 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}^n$ 的子集 A 被赋以诱导拓扑后就成为拓扑空间.

例如，在 $\mathbb{R}^n$ 上由 $\sum x_i^2=1$ 定义的球面 S_{n-1} 就构成一个非常有

意义的子空间.

任何与 S_{n-1} 同胚的空间称为 $(n-1)$ 维拓扑球，特别是同胚于 S_1 的任何空间称为简单闭曲线.

同样，我们称任何与 $]0,1[$（相应地，$[0,1]$）同胚的空间为简单开（相应地，闭）弧.

Z 在 $\mathbb{R}$ 中任何开区间 $]a,b[$ $(a<b)$ 是同胚的，因为我们可以用形为 $x\to\alpha x+\beta$ 的膨胀把一个区间变为另一个区间；它们中的每一个也都与 $\mathbb{R}$ 同胚，例如 $\mathbb{R}$ 到 $]-1,1[$ 上的双射 $x\to x/(1+|x|)$ 就是一个同胚.

同样还有，对于每个这样的区间 $]a,b[$，由 $\mathbb{R}$ 的拓扑诱导的拓扑恒同于 $]a,b[$ 上的序拓扑. 但是不应该认为这种恒同能推广到 $\mathbb{R}$ 的任何子集；例如，在 $A=([0,1[)\cup\{2\}$ 上这两种拓扑就是不同的. 通过下列陈述，我们将刻划一类两种拓扑恒同的集合.

9-7 设 X 是全序集；对于 X 的任何广义区间 A，A 上的序拓扑恒同于 X 的序拓扑在 A 上的迹.

事实上，任何序集 A 的开区间形为 $]a,b[$，$]\leftarrow,a[$，$]a,\rightarrow[$ 或 A，其中 a,b 表示 A 的点. 既然这样的集合是 A 与 X 的开区间的交，因而这种集合的并无非就是 A 与 X 的某个开集的交，由此得到两种拓扑恒同.

例如，在 $\mathbb{R}$ 上，$[0,1]$ 或 $]0,1[$ 上的序拓扑恒同于由 $\mathbb{R}$ 的拓扑诱导的拓扑.

10. 空间的有限乘积

我们已经在前面利用 $\mathbb{R}$ 的开区间的乘积，定义了由 $\mathbb{R}$ 的拓扑导得的 $\mathbb{R}^n$ 上的拓扑. 这种做法可以推广到空间的任意乘积情形. 这里我们只研究空间的有限乘积.

设 $E_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 是拓扑空间的有限族，$E=\prod E_i\,(i=1,$

$2, \cdots, n$)是序列 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的集合，其中 $x_i \in E_i$. 在 E 上所有可能的拓扑中，我们将只考虑使每个 E 到 E_i 的射影 $x \to x_i=f_i(x)$ 都连续的拓扑；这一条件等于说对于每个开集 $\omega_i \subset E_i$，集合 $f_i^{-1}(\omega_i)$，即乘积

$$E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times \omega_i \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n,$$

应该是 E 上的开集. 因此，所有这种集合的有限交，即形为 $\prod \omega_i$ 的集合以及所有这种形式的集合的并，也将都应是 E 上的开集. 如果我们能够验证后面所说的这些集合满足公理 O_1, O_2, O_3，那末自然可取它们所定义的拓扑为 E 上的拓扑.

这样就导致下列定义.

定义 10-1 我们称所有形为 $p=\prod \omega_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 的 E 的集合为 $E=\prod E_i$ 的初等开集，其中 ω_i 为 E_i 的任意开集.

我们称任何初等开集的并为 E 的开集.

这些开集的族显然满足公理 O_1 和 O_3. 它也满足 O_2，因为如果

$$A=\bigcup_{j \in J} p_j, \quad A'=\bigcup_{k \in K} p'_k,$$

我们有

$$A \cap A'=\bigcup_{(j,k) \in J \times K} (p_j \cap p'_k),$$

且每个 $(p_j \cap p'_k)$ 也是初等开集.

因此这些开集定义了 E 上的拓扑. 由构造，这一拓扑使得对于每个 i, E 到 E_i 上的射影是连续映射. 我们称被赋以这个拓扑的 E 为空间 E_i 的拓扑乘积.

例 1° 在 §4 中我们已定义 $\mathbb{R}^n$ 上的拓扑；那里我们已经取开方块的并为开集；但是由于 $\mathbb{R}$ 的任何开集是开区间的并，用这些开方块定义的 $\mathbb{R}^n$ 上的拓扑恒同于乘积拓扑.

2° 乘积 $S_1 \times \mathbb{R}$ 称为圆柱的拓扑空间.

3° 乘积 $(S_1)^n$ 称为 n 维圆环.

Z 对于 E_i 的乘积 E 的任何开集 Ω, Ω 在每个 E_i 上的射影是开集，因为这是其并为 Ω 的初等开集 $p=\prod\omega_i$ 的射影 ω_i 的并.

相反,认为 E 的闭集 A 的射影总是闭集则是错误的. 乘积空间 $\mathbb{R}^2$ 的闭集 $A=\{(x, y): xy=1\}$就是一个例子.

子空间的乘积 如果 A_i 表示 E_i 的子空间,我们将验证,在 $A=\prod A_i$ 上的乘积拓扑恒同于$\prod E_i$ 的拓扑在其子集 A 上诱导的拓扑.

特别是，对于任何 $a_i\in E_i(i=2, 3, \cdots, n)$，空间 E_1 在映射 $x_1\to(x_1, a_2, \cdots, a_n)$ 下同胚于 E 的子空间 $E_1\times\{a_1\}\times\cdots\times\{a_n\}$.

拓扑乘积的结合律 如果 A, B, C 是三个拓扑空间，则在空间$(A\times B)\times C$(相应地，$A\times(B\times C)$)和 $A\times B\times C$ 之间的一一典则对应是同胚.

只需(见§5)指出，这一对应保持邻域不变. 而任何$(A\times B)\times C$ 的点(a, b, c)具有由集合

$$(\omega_a\times\omega_b)\times\omega_c$$

组成的邻域基;任何$(A\times B\times C)$的点(a, b, c)具有由集合 $\omega_a\times\omega_b\times\omega_c$ 组成的邻域基,这里 $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ 表示 a, b, c 在 A, B, C上的开邻域. 由于集合$(\omega_a\times\omega_b)\times\omega_c$ 与 $\omega_a\times\omega_b\times\omega_c$ 在一一典则映射下是对应者,从而得到所求性质.

这一结合律使我们可以简化某些证明，即这些证明只需对两个空间的乘积来进行.

交换律 我们容易验证，拓扑乘积在例如下列意义下是可交换的: $A\times B$ 到 $B\times A$ 上的典则双射$(x, y)\to(y, x)$是同胚.

乘积空间上的连续映射 我们通常用 E 到每个 F_i 的坐标映射 $x\to f_i(x)$ 来表示空间E到乘积空间 $F=\prod F_i$ 的映射 $x\to f(x)$. 由下列命题得到 f 的连续性和 f_i 的连续性之间的紧密联系:

命题 10-2 为使 E 到有限乘积 $F=\prod F_i$ 的映射 f 在 a 上连续，必需且只需每个 E 到 F_i 的坐标映射 f_i 在 a 上连续。

事实上，如果 f 在 a 上连续，由于 $f_i=\mathrm{pr}_i\circ f$，这里 pr_i 表示 F 到 F_i 上的射影运算，故映射 f_i 在 a 上连续．反之，假设每个 f_i 在 a 上连续；对于任何包含 $f(a)$ 的 F 的初等开集 $\omega=\prod\omega_i$，$f_i^{-1}(\omega_i)$ 是 a 在 E 上的邻域，因此，$f^{-1}(\omega)$，即

$$\bigcap_i f_i^{-1}(\omega_i)$$

也是 a 的邻域．由于 $f(a)$ 在 F 上的任何邻域 V 包含着含 $f(a)$ 的初等开集 ω，包含 $f^{-1}(\omega)$ 的 $f^{-1}(V)$ 更是 a 的邻域。

例 设 u_1, u_2 两个分别是 E 到 F_1, F_2 的连续映射，$g:(y_1, y_2)\to g(y_1, y_2)$ 是 $F_1\times F_2$ 到空间 G 的连续映射．

于是 E 到 G 的映射 $X\to g(u_1(x), u_2(x))$ 是连续的。

乘积空间到另一空间的映射 设

$$f:(x, y)\to f(x, y)$$

为乘积 $X\times Y$ 到空间 F 的映射。

如果 f 连续，则它在 $X\times Y$ 的任何子空间上的限制也连续；特别是，对于任何 $a\in X$，f 在 $(a\times Y)$ 上的限制连续．换句话说，因为 Y 到 $(a\times Y)$ 上的映射 $y\to(a, y)$ 是同胚，故 Y 到 F 的映射 $y\to f(a, y)$ 连续。

这也就是说，f 的连续性导致偏映射 $x\to f(x, b)$ 和 $y\to f(a,y)$ 的连续性．

Z 但是反之不然；事实上，设 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 f 定义为 $f(0, 0)=0$；$f(x, y)=xy/(x^2+y^2)$，当 $(x, y)\neq(0, 0)$．

直接可得两个偏映射都是连续的；但 f 在 0 上不连续，因为例如对于任何 $x\neq 0$，

$$f(x, x)=1/2,$$

但

$$f(0, 0)=0.$$

我们还能构造类似的例子使得 f 的间断点的集在 $\mathbb{R}^2$ 上处处稠.

乘积空间上的极限 用与命题 10–2 的同样方式我们将证明下列陈述:

命题 10–3 为使 $F=\prod F_i$ 的点列 (a_n) 收敛于 F 的点 $l=(l_i)$, 必需且只需对于任何 i, 序列 $(a_n)_i$ 收敛于 l_i.

更一般地, 设 $\mathscr{B}$ 是集合 E 上的滤子基, $f=(f_i)$ 是 E 到乘积拓扑空间 $F=\prod F_i$ 的映射, $l=(l_i)$ 为 F 的点.

可以验证,

$$(l=\lim_{\mathscr{B}} f)\Leftrightarrow(\text{对于任何 } i,\ l_i=\lim_{\mathscr{B}} f_i).$$

分离空间的乘积

命题 10–4 如果空间 E_i 是分离的, 那末它们的乘积 E 也是分离的.

显然只需对于两个空间 E_1, E_2 的乘积进行证明.

因为当 a 和 b 是 E 的两个坐标分别为 $(a_1,\ a_2)$ 和 $(b_1,\ b_2)$ 的不同点时, 或者有 $a_1\neq b_1$, 或者有 $a_2\neq b_2$. 不妨设 $a_1\neq b_1$, 则 E_1 的点 a_1 和 b_1 具有两个不相交的邻域 V_1 和 W_1; 因此, 点 a 和 b 也具有两个不相交的邻域 $V_1\times E_2$ 和 $W_1\times E_2$.

例 由于 $\mathbb{R}$ 是分离的, 所有 $\mathbb{R}^n$ 也是分离的.

所有 $\mathbb{R}^n$ 的子空间因而也是分离的, 特别是 S_{n-1} 是分离的.

命题 10–5 对于任何分离空间 E, $E\times E$ 的对角线 Δ 是 $E\times E$ 中的闭集.

事实上, 设 $(a,\ b)\notin\Delta$; 则 E 的不同点 a, b 可以有两个不相交的邻域 V_a, V_b; 乘积 $V_a\times V_b$ 是 $(a,\ b)$ 在 $E\times E$ 中的邻域, 且与 Δ 不相交, 因而 $(E\times E\dot{-}\Delta)$ 是 $(a,\ b)$ 的邻域.

Δ 的余集是它的每一点的邻域, 故是开集, 因此 Δ 是闭集.

系 1 如果 f, g 是空间 X 到分离空间 E 的连续映射, 那末

满足 $f(x)=g(x)$ 的 X 的点 x 全体是闭集.

事实上，设 h 是 X 到 $E\times E$ 的映射 $x\to(f(x),\ g(x))$；它是连续的；而所求的集合无非就是 $h^{-1}(\Delta)$. 由于 Δ 是闭集，故这个集合是闭集.

系 2 如果 f 是空间 E 到分离空间 F 的连续映射，那末 f 的图象 Φ 在 $E\times F$ 中闭.

事实上，Φ 是 $E\times F$ 中满足 $y=f(x)$ 的点 $(x,\ y)$ 的集合；既然映射 $(x,\ y)\to y$ 和 $(x,\ y)\to f(x)$ 都是 $E\times F$ 到 F 的连续映射，由上述系，Φ 是闭的.

Z 必须注意系 2 的逆不成立，甚至当 E 和 F 都是分离的，f 的图象仍可能在 f 不连续时为闭集.

例如，设 f 为 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的如下定义的映射：

$$f(0)=0;\ f(x)=1/x,\ \text{当}\ x\neq 0.$$

f 的图象是曲线 $xy-1=0$ 和集合 $\{0\}$ 的并，故是闭的；然而 f 在点 0 不连续.

11. 紧 空 间

在 §3 中，我们已经建立了 $\mathbb{R}$ 的有界闭区间的一条重要性质，它被命名为 Heine-Borel-Lebesgue 定理；其重要性在于，它能使某些整体研究被局部研究所代替.

我们也可研究其他具有类似性质的拓扑空间；比如我们将看到 $\mathbb{R}^n$ 中的所有有界闭集就有这种性质.

这里我们将对具有这种性质的空间进行一般研究.

定义 11-1 我们说空间 E 是紧的，是指它是分离的，且由 E 的任何开覆盖中都可选出有限子覆盖.

在这一定义中，条件"E 是分离的"是为了避免一些用处不大的空间，比如有粗拓扑的空间.

例 所有有限分离空间是紧的. 相反, $\mathbb{R}$ 不是紧空间(见§3). 下列定理将给我们提供一大类紧空间.

熟悉紧性条件的多种等价形式是有益的. 下面是其中之二:

陈述 11-2 E 分离, 且由 E 的其交为空集的任一闭集族中可选出有同样性质的有限子族.

这一条件是前面的定义的对偶; 事实上, 如果 $(G_i)_{i\in I}$ 是 E 的开集族, 公式 $E=\bigcup_{i\in I}G_i$ 等价于

$$\varnothing=\bigcap_{i\in I}F_i,\quad 其中\quad F_i=\complement G_i.$$

现在, 我们说 E 的子集族 $\mathscr{F}$ 具有有限交性质, 是指 $\mathscr{F}$ 的任何有限子族有非空交. 在这一约定下, 上述陈述显然等价于下列

陈述 11-3 E 分离, 且 E 的任何具有有限交性质的闭集族有非空交.

特别是我们可以叙述:

命题 11-4 在紧空间 E 中, 任何按包含关系为全序的非空闭集族有非空交. 例如, 任何递减的非空闭集列有非空交.

事实上, 全序集族的任何有限子族具有最小元素, 即这个子族的交, 这里它是非空的.

实直线不具有这种性质, 例如闭区间列 $[n,+\infty[\ (n=1,2,\cdots)$ 有空的交.

命题 11-5 1° 在紧空间中, 任何点列至少具有一个附着值.

2° 如果它有唯一的附着值, 则序列收敛于这个值.

1° 事实上, 利用定义 8-4 后用过的记号, 附着值集是非空闭集 $\overline{A}_n$ 的递减列的交.

2° 设 a 为 $A=\bigcap_{1}^{\infty}\overline{A}_n$ 的唯一元素. 对于 a 的任何开邻域 V, 闭集 $\overline{A}_n\cap\complement V$ 显然有空集交; 于是因为它们构成递减列, 其中之一

必须是空集，即从某个 n 起，有 $\overline{A}_n\subset V$，尤其是 $A_n\subset V$.

更一般地可以验证，任何由被赋以滤子基 $\mathscr{B}$ 的集合 X 到紧空间 E 的映射 f 至少有一个关于 $\mathscr{B}$ 的附着值，且如果 f 有唯一的附着值，f 就收敛于这个值.

Z 在紧空间中，序列 $\{a_n\}$ 形成的点集 A 并非总是有聚点的；事实上，A 可能是有限集，甚至退化为一个点，只要所有 a_n 都恒等，换句话说，当一点成为序列 (a_n) 的附着值时，它或者是 a_n 的集合 A 的聚点，或者是与无限个 a_n 重合.

命题 11–6 (Bolzano–Weierstrass 定理的类似).

1° 紧空间 E 的任何无限子集 A 至少有一个 E 中的聚点.

2° E 的任何在 E 中没有聚点的子集 A 是有限集.

显然这两条性质是等价的；其中第二条性质可完全如同定理 3–3 那样证明.

Z 反之，不能断言"任何其无限子集至少有一聚点的分离空间是紧空间"；但是稍后我们将证明这个逆命题对于距离空间 E 是正确的.

命题 11–7 设 A 是空间 E 的分离子空间：

(A 紧)$\Leftrightarrow$(任何 E 的覆盖 A 的开集族包含也覆盖 A 的有限子族).

证明 1° 如果 A 紧，$(\omega_i)_{i\in I}$ 是 E 的覆盖 A 的开集族，则 $(A\cap\omega_i)_{i\in I}$ 构成紧空间 A 的开覆盖；因此存在 I 的有限子集 J，使得 $(A\cap\omega_i)_{i\in J}$ 覆盖 A；尤其是 $(\omega_i)_{i\in J}$ 也覆盖 A.

2° 反之，假设 A 具有第二条性质. 设 $(\omega_i')_{i\in I}$ 为 A 的覆盖 A 的开集族；所有 ω_i' 的形式为 $\omega_i'=A\cap\omega_i$，其中 ω_i 是 E 的开集.

ω_i 覆盖 A，故存在 I 的有限子集 J 使得 $(\omega_i)_{i\in J}$ 也覆盖 A.

既然
$$\bigcup_{i\in J}(A\cap\omega_i)=A\cap(\bigcup_{i\in J}\omega_i)=A,$$

故有限族$(\omega_i')_{i\in J}$也覆盖 A.

这就恰好指出，由 A 的任何以开集(ω_i')组成的覆盖中，我们总可选出有限子覆盖；因此，A 是紧的.

系 11-8 对于任何 $a, b\in\mathbb{R}$，闭区间$[a, b]$是紧的.

这是定理 3-2 和我们刚证明的命题 11-7 的直接推论.

系 11-9 设 E 为分离空间，(a_n)为收敛于 E 的点 a 的E的点列. 那末集合 $A=\{a, a_1, a_2, \cdots\}$是紧的.

事实上，首先 A 是分离的；然后设(ω_i)为以 E 的开集组成的 A 的覆盖. 则存在包含 a 的 ω_{i_0}，这个开集是 a 的邻域，因此除了至多有限个 $a_{n_1}, \cdots, a_{n_p}$ 它包含所有 a_n. 而这有限个点又都分别包含在 $\omega_{i_1}, \cdots, \omega_{i_p}$ 中，于是开集 $\omega_{i_0}, \omega_{i_1}, \cdots, \omega_{i_p}$ 组成 A 的有限复盖. 因此 A 是紧的.

现在下面是一系列至关紧要的定理.

定理 11-10 在紧空间 E 中，任何点 a 有闭邻域基.

证明 设ω为 a 的开邻域，F 为ω的余闭集. 如果 a 的任何闭邻域V 都不在ω中，那末所有 V 都与 F 相交，且由于 V 的族对于有限交是稳定的，$V\cap F$ 的族有有限交性质，以至有非空交. 换句话说，所有 V 有公共点 $b\neq a$. 但这是不可能的，因为 E 分离(见 8-2). 从而存在V 包含在ω中.

定理 11-11 在任何紧空间 E 中，任何闭子集是紧子空间.

证明 为了简化证明. 我们将利用一条非常适合我们问题的紧性判别准则，比如用闭集表达的准则 11-3.

设 A 在 E 中闭，$(X_i)_{i\in I}$为空间 A 的具有有限交性质的闭集族.

由于 A 是闭的，X_i 也是 E 的闭集；而由于 E 是紧的，X_i 的交不是空的. 因此 A 是紧的.

定理 11-12 在任何分离空间 E 中，E 的任何紧子空间在

E 中闭.

设 A 是 E 的紧子空间. 我们将指出, $\complement A$ 是开的.

设 $x_0\in\complement A$. 对于任何 $y\in A$, 令 V_y 和 W_y 分别为 x_0 和 y 的两个不相交的开邻域. 则存在开集 W_y 的族的有限子族 $(W_{y_i})_{i\in I}$ 覆盖 A. 开集 $V=\bigcap_{i\in I}V_{y_i}$ 是 x_0 的邻域, 且与每个 W_{y_i} 不相交, 从而也与 A 不相交; 换句话说, $V\subset\complement A$. 这样 $\complement A$ 是它的每一点的邻域, 从而是开的.

我们注意到, 关于 E 为分离的假设是本质的. 例如, 当 E 有粗拓扑, 且多于一点, 则任何退化为一点的 E 的子集是紧子空间, 但它不是闭的.

这条定理指出, 任何紧空间都可以称为"绝对闭集", 因为它在所有包含它的空间(至少对于分离空间)中都是闭的.

系 11-13(定理 11-11 和 11-12)　在任何紧空间 E 中, 闭子集类恒同于紧子集类.

系 11-14　$\mathbb{R}$ 的紧子空间全体是 $\mathbb{R}$ 的有界闭子集全体.

事实上, 如果 X 是 $\mathbb{R}$ 的有界闭子集, 则存在包含 X 的区间 $[a\ \ b]$; 由于 X 在 $\mathbb{R}$ 中闭, 故它在子空间 $[a, b]$ 中也是闭的, 而 $[a, b]$ 是紧的, 故 X 也是紧的.

反之, 如果 X 是 $\mathbb{R}$ 的紧子集, 则 X 在 $\mathbb{R}$ 中闭, 因为 $\mathbb{R}$ 是分离的. 另一方面, X 有界是因为开集列 $]-n, n[$ (其中 $n=1, 2, \cdots$) 构成 X 的覆盖, 故从中可选出覆盖 X 的有限子列, 其中最大的那个就包含 X.

定理 11-15　在任何分离空间中, 两个紧集的并是紧的, 紧集的任意交是紧的.

证明　设 A 和 B 是 E 的两个紧集.

1° 由于 E 是分离的, 故 $A\cup B$ 也分离.

另一方面，$(A\cup B)$的任何开覆盖也是 A 和 B 的开覆盖．因此可选出两个有限子覆盖，一个是 A 的，另一个是 B 的．它们合在一起又组成$(A\cup B)$的有限覆盖．因此 $A\cup B$ 是紧的．

2° 如果$(A_i)_{i\in I}$都是紧的，则它们中的每一个在 E 中都是闭的．从而它们的交在 E 中闭，尤其是在这些紧集的任意一个 A_{i_0} 中闭．因此，这一交集是紧的(定理 11-10)．

显然，紧集的无限族的并一般不是紧集．

定理 11-16 对于任何紧空间 E 到分离空间 F 的连续映射 f，F 的子空间 $f(E)$ 是紧的．

证明 首先 $f(E)$ 分离，因为 F 分离．然后，设 $(\omega_i)_{i\in I}$ 为 $f(E)$ 的用 $f(E)$ 的开集组成的覆盖．则 $f^{-1}(\omega_i)$ 构成 E 的开覆盖，从而由此可选出有限覆盖$(f^{-1}(\omega_i))_{i\in I}$．由于 $f(f^{-1}(\omega_i))=\omega_i$，故$(\omega_i)_{i\in I}$ 也覆盖 $f(E)$．因此 $f(E)$ 是紧的．

系 11-17 紧空间 E 到分离空间 F 的任何连续双射 f 是同胚．

只需指出 f^{-1} 连续，即对于任何 E 的闭集 X，$f(X)$ 在 F 中闭．

既然 X 在紧的 E 中闭，故它也是紧的；于是，它在分离的 F 中的象 $f(X)$ 是紧的，故也是闭的．

这一系为我们提供了由映射的连续性和双射性可导出其双方连续性(即 f 和 f^{-1} 的连续性)的一种重要情形．

系 11-18 紧空间 E 上的任何连续数值函数是有界的，且在 E 上达到它的上确界和下确界．

设 f 为 E 到 $\mathbb{R}$ 上的连续映射．$f(E)$ 是紧的，从而在 $\mathbb{R}$ 上为有界闭集，以至包含它的下确界 b_1 和上确界 b_2．因此在 E 上存在 x_1，满足 $f(x_1)=b_1$；存在 x_2，满足 $f(x_2)=b_2$．

特别是，当 E 上有 $f(x)>0$ 时，则存在 $b>0$，使得在 E

上有 $f(x)\geqslant b$.

Z 如果 E 不是紧的，E 上的连续函数可以不是有界的，即使有界，也可以不达到它的上、下确界.

例如，函数 $x\to x$ 在 $\mathbb{R}$ 上不是有界的.

函数 $x\to x/(1+|x|)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界，但不能达到它的两个确界.

函数 $x\to 1/x$ 在 $]0,\ 1]$ 上不是有界的.

函数 $x\to x$ 在 $]0,\ 1[$ 上有界，但不能达到它的两个确界.

系 11–19 如果 E 是分离空间 E_i 的乘积，那末 E 的任何紧集在每个 E_i 上的射影是紧的.

事实上在每个 E_i 上的射影是连续映射.

紧空间的乘积 定理 11–11 和 11–16 为我们提供了一种构造紧空间的强有力的手段. 下面是另一种手段，它对于多变量函数的研究特别方便.

定理 11–20 紧空间的任何有限乘积是紧的.

证明 根据拓扑乘积的结合律，只需指出对于两个空间的乘积的定理.

设 $E=X\times Y$ 为紧空间 X 和 Y 的乘积. 由于 X 和 Y 分离，E 也分离(命题 10–4).

现在设 $(\omega_i)_{i\in I}$ 为 E 的开覆盖. 对于任何 $m=(x,\ y)\in E$，存在 $i_m\in I$，使得 $m\in\omega_{i_m}$. 于是存在 x 和 y 在 X 和 Y 中的开邻域 V_m 和 W_m，使得 $V_m\times W_m\subset\omega_{i_m}$. 令 $U_m=V_m\times W_m$.

既然对于任何 $x_0\in X$，$X\times Y$ 的子集 $Y_0=x_0\times Y$ 与 Y 同胚，故也是紧的.

$(U_m)_{m\in Y_0}$ 构成 Y_0 的开覆盖，由此可选出有限覆盖

$$(U_{m_j})_{j\in J},\quad 其中\ m_j=(x_0,\ y_j).$$

置 $$V_{x_0}=\bigcap_{j\in J}V_{m_j};$$

这是 x_0 的开邻域，且显然有

$$\bigcup_{j\in J}\omega_{i_{m_j}}\supset V_{x_0}\times Y.$$

V_{x_0} 构成 X 的开覆盖，由此可选出有限覆盖. 每个对应的 x_0 (共有限个)与开集 ω_i 的子族 $(\omega_{i_{m_j}})$ 相联系；这些族的并是覆盖 E 的有限族.

系 11-21 $\mathbb{R}^n$ 的紧子空间是 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭子集(A 称为在 $\mathbb{R}^n$ 中有界，是指它包含在某个有有界基的方块中).

事实上，如果 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧集；则它在 $\mathbb{R}^n$ 中闭；另一方面 A 在每一因子空间 $\mathbb{R}$ 上的射影是紧的，故它包含在某个有界区间中；因此 A 包含在某个有有界基的方块中.

反之，如果 A 是有界闭集，即它是紧区间 $[a_i, b_i]$ 的有限乘积的闭子集；这样的乘积是紧的，故 A 也是紧的.

例 $\mathbb{R}^n$ 的球面是有界闭集，故也是紧的. 由此得到圆环 $(S_1)^p$ 也是紧的.

拓扑空间的相对紧集 我们已经看到 $\mathbb{R}^n$ 的紧集无非就是 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭集；既然 $\mathbb{R}^n$ 的任何有界子集有有界闭包；从而可知 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集与 $\mathbb{R}^n$ 中的有紧闭包的集合是一回事.

同样，在任意的拓扑空间中，我们可以期望，起着有界集的作用的集合就是具有紧闭包的那种集合. 我们给这种集合一个专门名称：

定义 11-22 我们说拓扑空间 E 的子集 A 是相对紧的，是指它的闭包 $\overline{A}$ 是紧的.

很明显，这个定义不是对于 A 的拓扑而言的，而只是对于 (A, E) 这一对而言的；例如区间]0, 1[在 $\mathbb{R}$ 中是相对紧的，但在其自身中则不是.

下面是几条直接的性质：

1° 如果 A 在 E 中相对紧，那末 A 的任何子集也相对紧.

2° 紧空间 E 的任何子集是相对紧的.

3° 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 在分离空间 E 中是相对紧的，那末它们的并也相对紧.

4° E 的相对紧集 A 的任何点列在 E 中至少有一个附着值.

12. 局部紧空间；紧化

有许多空间其本身并不紧，但它的局部可看作紧空间；$\mathbb{R}$ 就是这样的例子. 确切地说：

定义 12-1 我们称分离空间 E 为局部紧空间，是指它的每一点至少有一个紧邻域.

例 1° 任何紧空间是局部紧的.

2° 任何离散拓扑空间是局部紧的(例如 $\mathbb{Z}$).

3° 直线 $\mathbb{R}$ 是局部紧的；事实上，首先 $\mathbb{R}$ 是分离的；其次，对于任何 $x\in\mathbb{R}$，存在 $a, b\in\mathbb{R}$，使得 $a<x<b$，且 $[a, b]$ 是 x 的紧邻域.

此外，我们知道 $\mathbb{R}$ 不是紧的.

4° $\mathbb{R}$ 的子空间 $\mathbb{Q}$ 既不是紧的，也不是局部紧的；事实上，例如假设 0 在 $\mathbb{Q}$ 中有紧邻域 V；则 0 的邻域 V 包含形为 $\mathbb{Q}\cap[-a, a]$ 的子邻域；由于后者在 $\mathbb{Q}$ 中闭，集合 $A=\mathbb{Q}\cap[-a, a]$ 将也是紧的；然而这明显是不成立的，因为对于任何无理数 $x\in[-a, a]$，闭集 $A\cap\left[x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right]$ 的递减列有空的交.

命题 12-2 在局部紧空间中，任何点有紧邻域基.

证明 事实上，在局部紧的 E 中，设 ω 为点 a 的开邻域. 由假设，a 有紧邻域 K. 在紧空间 K 中，a 有闭以至紧的邻域 V 包

含在 $K\cap\omega$ 中(见 11-10). 然而 V 也是 a 在 E 中的邻域,因为 K 也是,故这就是所求的紧邻域.

下面的一些命题为我们提供了构造局部紧空间的有力方法.

命题 12-3 局部紧空间的任何闭子集是局部紧的.

证明 设 E 为局部紧空间, A 为 E 的闭子集. 任何 $x\in A$ 在 E 中有紧邻域 V. 集合 $V\cap A$ 在 V 中闭,故也是紧的;由于这是 x 在 A 中的一个邻域,故说明这点在 A 中有紧邻域. 最后, A 是分离的,因为它包含在分离空间 E 中;从而它就是局部紧的.

例 任何 $\mathbb{R}^n$ 的代数流形是局部紧的.

命题 12-4 如果 A 和 B 是分离空间的两个局部紧子空间,那末它们的交也是局部紧的.

证明 首先 $A\cap B$ 是分离的;其次,对于任何 $x\in A\cap B$ 存在 x 的两个紧邻域 V 和 W, 分别在 A 和 B 中,集合 $V\cap W$ 是 x 在 $A\cap B$ 中的邻域,且它是紧的.

Z 相反, A 和 B 的并可以不是局部紧的. 例如设 A 为 $\mathbb{R}^2$ 的由满足 $x>0$ 的点 (x, y) 组成的子集;又设 $B=\{(0, 0)\}$; 集合 $A\cup B$ 不是局部紧的, 因为点 $(0, 0)$ 在 $A\cup B$ 中没有任何紧邻域.

命题 12-5 局部紧空间的任何有限乘积也是局部紧的.

证明 显然只需对两个空间 A, B 来证实这个论点.

由于 A, B 都是分离的,故 $A\times B$ 也分离.

另一方面,对于任何 $(x, y)\in A\times B$, 点 x 和 y 分别在 A, B 中有紧邻域 V, W. 乘积 $V\times W$ 是 (x, y) 的所求紧邻域.

例 空间 $\mathbb{R}^n$ 和 $S_1\times\mathbb{R}$ 是局部紧的.

Z 定理 11-16 对于局部紧空间没有相应的结果;换句话说,不能错误地认为:"任何可作为局部紧空间的连续映射的象的分离空间还是局部紧的".

例如，$\mathbb{Q}$ 是可数的，故存在 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Q}$ 的满射 $n\to f(n)$；因为 $\mathbb{Z}$ 离散，则 f 连续．然而 $\mathbb{Q}$ 不是局部紧的，尽管 $\mathbb{Z}$ 是局部紧的．

命题 12-6 设 E 是局部紧空间，但不是紧的，f 为 E 上的连续数值函数，满足

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty.$$

(其意义为对于任何 $h>0$，存在紧集 $K\subset E$，使得在 K 以外，$f(x)>h$)．

那末 f 有下界，且达到它的下确界．

证明 设 a 为 E 的任意点，h 为大于 $f(a)$ 的数．

由假设，存在紧集 $K\subset E$，满足在 K 外有 $f(x)>h$．f 在 K 上的限制是连续的，于是在 K 的点 b 达到下确界 m．

对于任何 $x\notin K$，有

$$f(x)>h>f(a)\geqslant m\ .$$

对于任何 $x\in K$，有

$$f(x)\geqslant m.$$

因此 m 是 f 在 E 上的下确界，且它在点 b 上被达到．

注意，使 $f(x)=m$ 的 x 的集合是闭集，且包含在 K 中；因此，这是一个紧集．

我们可以用类似的方式证明，对于 E 上的任何连续数值函数 f，如果当 $x\to\infty$ 时(即沿由 E 的紧集的余集组成的滤子基)它趋向于有限值 l，那末它有界，且达到它的不同于 l 的确界．

例 12-7 D' Alembert-Gauss 定理 设 $P(z)$ 为 z 的任意复系数多项式，其次数 >0．数值函数 $z\to|P(z)|$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上连续；另一方面，如果 $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots a_1z+a_0$(其中 $a_n\neq 0$)，则对于任何 $z\neq 0$，我们可把它写成

$$|P(z)|=|a_n|\times|z|^n\times|1+a_{n-1}/a_nz+a_{n-2}/a_nz^2+\cdots+a_0/a_nz^n|^{*)}$$

---

*) 原书作 $|a_n|\times|z|^n\times|1+a_1/z+a_2/z^2+\cdots+a_n/z^n|$．有误．——译者注

因此，当 $z \to \infty$ 时，$|P(z)| \to +\infty$.

命题 12-6 的假设都满足；从而可以肯定 $|P(z)|$ 在某一点 z_0 达到它的下确界.

我们将证明 $P(z_0)=0$；为此，置 $z=z_0+u$；我们有：

$$P(z)=P(z_0+u)=c_0+c_1u+\cdots+c_nu^n.$$

我们要证明 $c_0=0$. 假设 $c_0 \neq 0$，且 c_p 为 c_0 以后的第一个非零系数 $(p \leqslant n)$.

如果 λ 表示方程

$$\lambda^p+\frac{c_0}{c_p}=0$$

的某个根，且令 $u=\lambda v$，则多项式 $P(z)$ 变为：

$$P(z)=c_0[1-v^p-v^p\varepsilon(v)],$$

其中 $\varepsilon(v)$ 随 v 趋向于 0.

对于任何满足 $0<v\leqslant 1$ 的实数 v，有

$$|P(z)| \leqslant |c_0|\,[(1-v^p)+v^p|\varepsilon(v)|]=|c_0|\,[1-v^p(1-|\varepsilon(v)|)];$$

因此，只要 v 小到使 $|\varepsilon(v)|<1$，就有 $|P(z)<|c_0|$. 这样由假设 $c_0 \neq 0$ 导得矛盾；总之，任何次数 >0 的多项式 $P(z)$ 至少有一个根.

无限远点和紧化 在命题 12-6 的陈述中，表达式«$x \to \infty$»不仅是一种方便的说法. 事实上，我们可以指出，对于任何局部紧但非紧的空间 E，总可在 E 上附加一个称为 E 的无限远点的补充点 ω，并对集合 $E\cup\{\omega\}$ 赋以一种使其成为紧空间的拓扑(而且这种拓扑是唯一的)，而它在 E 上的迹就是原来的拓扑；这就使上述说法变为精确的了.

更一般地，我们还可试图求出使 E 成为其处处稠子空间的紧空间 $\hat{E}$；$(\hat{E} \div E)$ 的点于是都可解释为 E 的无限远点. 这种空间 $\hat{E}$ 实现了所谓 E 的紧化.

根据分析或几何的各种需要，我们就会时而对这样那样的紧化感兴趣；例如在射影几何中所用的 $\mathbb{R}^n$ 的紧化是被称为 n 维射影空间的紧空间 P_n，它等同于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的被赋以适当拓扑的通过 0 的直线全体.

我们在这里只研究两个简单的例子.

12-8 $\mathbb{R}^n$ 通过一个无限远点的紧化 由

$$x \to \frac{x}{\|x\|^2} = \frac{x}{\sum x_i^2}$$

定义的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的极点为 0、幂为 1 的反演 f 是 $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ 到自身的同胚.

它把 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的超平面 $x_{n+1}=1$ 变为 $S\dot{-}\{0\}$，其中 S 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的直径为 $(0, A)$ 的球面，这里令 A 为点 $(0, 0, \cdots, 0, 1)$.

由于 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的超平面的典则映射 g: $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (x_1, x_2, \cdots, x_n, 1)$ 是同胚，故 $\mathbb{R}^n$ 到 $S\dot{-}\{0\}$ 上的双射 $f\circ g$ 也是同胚. 如果由这个同胚我们把 $\mathbb{R}^n$ 和 $S\dot{-}\{0\}$ 看作一样，那末球 S 就实现了所求的 $\mathbb{R}^n$ 的紧化；它唯一的无限远点是点 0.

对于 $n=1$，S 是圆周.

对于 $n=2$，S 是二维球面；当我们把 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{C}$ 看作一样时，我们称它为 Riemann 球面；它在研究复平面时非常有用，特别是因为同胚 $f\circ g$ 保持角度不变（我们称它为"保形的"）.

12-9 完成直线 $\overline{\mathbb{R}}$ 我们刚才把 $\mathbb{R}$ 通过一个无限远点来紧化. 在分析中利用另一种紧化也是方便的. 在 §5 中，我们已经定义了完成直线 $\overline{\mathbb{R}}$，且在 §7 中也已指出，$\overline{\mathbb{R}}$ 与被赋以序拓扑的 $[-1, 1]$ 同胚.

另一方面，由于 $[-1, 1]$ 是区间，故它的开区间是 $\mathbb{R}$ 的开区间的迹；因此，$[-1, 1]$ 的序拓扑恒同于由 $\mathbb{R}$ 的拓扑诱导的拓扑；从而 $[-1, 1]$ 是紧的，故 $\overline{\mathbb{R}}$ 同样也是紧的.

此外，由 $\overline{\mathbb{R}}$ 在其子空间 $\mathbf{R}$ 上诱导的拓扑恒同于 $\mathbb{R}$ 原来的拓扑；因此 $\overline{\mathbb{R}}$ 恰好构成 $\mathbb{R}$ 的一种紧化.

$\overline{\mathbb{R}}$ 的任何非空子集 X 有上、下确界，因为这在 $[-1, 1]$ 中是成立的；当 X 为闭集时，这两个确界属于 X.

$+\infty$ 在 $\overline{\mathbb{R}}$ 上的邻域基可由区间 $[n, +\infty]$ 或 $]n, +\infty]$ 组成（其中 $n\in\mathbb{N}$）；对于 $-\infty$ 有类似的陈述.

13. 连 通 性

我们将试图确切说明这样的直观思想：$[0, 1]\cup[2, 3]$ 这样的集合可说成是有两块，而 $[0, 1]$ 则只有一块.

当拓扑空间 E 的两个子集 A, B 包含在 E 的两个不相交的闭集中时，就认为它们在 E 中完全分离那是十分自然的；注意到这点，我们就有下列精确的定义：

定义 13-1 我们说拓扑空间 E 是连通的，是指不存在任何把 E 分为两个非空闭子集的分划.

这一性质（通过对偶）显然等价于下列性质中的每一条：

13-2 不存在任何把 E 分为两个非空开子集的分划.

13-3 E 的同时是开集和闭集的子集只有 E 和 $\varnothing$.

我们说空间 E 的子集 A 是连通的，是指 E 的子空间 A 是连通的.

例 1° 稍后在研究距离空间时我们将证明，$\mathbf{R}$（以至 $\mathbf{R}$ 的任何区间）是连通的；暂时我们先承认它.

2° 相反，有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是连通的；更一般地可指出，如果 $\mathbf{R}$ 的子集 A 不是区间，它就不连通；事实上，这时存在两个不同的点 $x, y\in A$，使得 $[x, y]\not\subset A$；于是存在点 $a\in[x, y]$ 使得 $a\notin A$. 非空集合 $A\cap]\leftarrow, a[$ 和 $A\cap]a, \rightarrow[$ 在 A 中都是开的，这就构成一种分划；因此 A 不是连通的.

总之，$\mathbb{R}$ 中仅有的连通子集是区间.

定理 13-4 设 X, Y 为拓扑空间 E 的两个互余子集，A 为 E 的连通子集.

如果 A 与 X 和 Y 都相交，那末 A 也与它们的边界相交.

证明 $\mathring{X}$，$\mathring{Y}$ 与 X，Y 的边界 F 组成 E 的一种分划；因此，当 A 与 F 不相交时，$\mathring{X}\cap A$ 和 $\mathring{Y}\cap A$ 就构成 A 的分成两个非空相对开集的分划. 这是不可能的，因为 A 连通.

现在下面是某些通常可用来证明集合连通的定理.

定理 13-5 设 $(A_i)_{i\in I}$ 是 E 的连通子集族. 如果这一族的交非空，那末它们的并是连通的.

证明 置 $A=\bigcup_{i\in I}A_i$. 考虑 A 的任何分成两个开集 O_1 和 O_2 的分划. 对于任何 i，$A_i\cap O_1$ 和 $A_i\cap O_2$ 是相对于 A_i 的开集，而由于 A_i 连通，两者之一必定是空的. 因此，任何 A_i 或者在 O_1 中，或者在 O_2 中. 既然所有 A_i 至少有一个公共点 x，不妨设它属于 O_1，那末 O_1 包含所有 A_i，且 O_2 是空的，因此 A 是连通的.

例 $\mathbb{R}^n$ 的任何凸子集*) X 是连通的；事实上，对于任何 $a\in X$，X 是包含 a 的线段的并，这些线段的每一个都是连通的，因为它们都同胚于 $[0, 1]$.

特别是 $\mathbb{R}^n$、任何 $\mathbb{R}^n$ 的开或闭方块、任何 $\mathbb{R}^n$ 的开或闭球，都是连通的.

定理 13-6 任何连通集的闭包是连通的.

证明 设 A 为空间 E 的连通子集. 对于 $\overline{A}$ 的分为 $\overline{A}$ 上的两个开集 O_1 和 O_2 的任何分划都对应有 A 的分为 A 上的两个开集 $A\cap O_1$ 和 $A\cap O_2$ 的分划. 既然 A 是连通的，其中之一例如 $A\cap O_1$ 是空的；由于 A 在 $\overline{A}$ 上处处稠，故集合 O_1 也是空的. 因此

---

*) $\mathbf{R}^n$（以及一般的实线性空间）中的子集 X 称为凸的，是指对于任何 $x_1, x_2\in X$，$\lambda\in[0, 1]$，有线段 $\{x: x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2,\ \lambda\in[0, 1]\}\subset X$. ——译者注

$\bar{A}$ 是连通的.

类似的证明可指出，任何满足 $A\subset B\subset\bar{A}$ 的 B 也是连通的.

例 任何 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的球面同胚于在 § 12 中对于 $\mathbb{R}^n$ 的紧化用过的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的球面 S; 既然 S 是同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的子空间的闭包，由 $\mathbb{R}^n$ 是连通的，S 也连通. 因此任何球面是连通的.

定理 13–7 连通空间的任何连续象是连通的.

证明 设 f 是连通空间 E 到 F 上的连续满射. 对于 F 的任何既开又闭的子集 X, $f^{-1}(X)$ 在 E 上也是既开又闭的，因此这是 E 或 $\varnothing$; 而 $X=f(f^{-1}(X))$，故 $X=F$ 或 $\varnothing$; 即 F 连通

定义 13–8 我们称任何连通紧空间为连续统.

由定理 11–16 和 13–7，任何是连续统 E 的连续象的分离空间是连续统.

在研究距离空间时，我们将证明距离连续统的一条性质，它将使连通性的概念更为直观.

例 1° $\mathbb{R}$ 的区间 $[-1, 1]$ 是连续统; 因此 $\bar{\mathbb{R}}$ 也是连续统;

2° 对于 $\mathbb{R}^n$ 的任何有界连通子集 X, $\bar{X}$ 是连通紧集，从而是连续统.

例如，$]0, 1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $x\to\sin 1/x$ 的图象 Γ 是 $]0, 1]$ 的连续象，因此这是 $\mathbb{R}^2$ 的连通子集; 它的闭包，即 Γ 与区间 $0\times[-1, 1]$ 的并是连续统.

在拓扑学中我们经常利用这一连续统来制作一些反例.

定义 13–9 我们称空间 E 的任何连通开子集 D 为 E 的区域.

命题 13–10 为使 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 D 是区域，必须且只需 D 的任意两点 p 和 q 都在一条包含在 D 中的其边平行于坐标轴的折线上.

证明 设 $(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的点列，其中每一条线段 $[a_i,$

$a_{i+1}]$ $(i<p)$ 都平行于 $\mathbb{R}^n$ 的某一坐标轴. 通过递推直接由定理 13-5 可得, 由这些线段的并组成的折线是连通的.

于是如果对于任何 p, $q\in D$, 这两个点都属于某条包含在 D 中的这种折线, 固定 p, 而使 q 遍历 D, 我们看到 D 是包含 p 的折线的并; 因此 D 是连通的.

反之, 设 D 连通. 对于任何 x, $y\in D$, 我们用 $x\sim y$ 表示这两个点是某条上述类型的折线的端点. 直接可得关系～是 D 中的等价关系, 且每一等价类都是开集(因为对于任何D 中的包含 x 的开方块中的点 y, 有 $x\sim y$); 但这样的类只能是唯一的, 否则 D 就会有分成两个非空开集的分划(例如, 一个是等价类之一, 另一个是其他等价类的并); 换句话说, 对于任何 x, $y\in D$, 有 $x\sim y$.

例 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 任何开球、任何开方块、任何闭球或任何闭方块的余集都是区域.

空间的连通成分 我们现在可以把非连通空间的"块"的模糊概念精确化, 以研究非连通空间的结构.

定义 13-11 对于空间 E 的任何点 x, 我们称 E 的含 x 的连通子集的并 $C(x)$ 为 x 的连通成分.

由定理 13-5, $C(x)$ 是连通集; 另一方面, 由于 $\overline{C(x)}$ 也是连通的, 且由构造, $C(x)$是 E 的含 x 的最大连通子集, 故有 $C(x)=\overline{C(x)}$, 换句话说, $C(x)$ 是闭的.

如果 x_1 与 x_2 属于同一连通子集, 则记为 $x_1\sim x_2$, 在 E 上这样的二元关系显然是等价关系. 既然对于任何 x, $C(x)$ 是含 x 的等价类, 则集合 $C(x)$ 也可定义为上述等价关系所联系的等价类. 这就是为什么我们把它们称为 E 的连通成分.

例 1° 如果 E 连通, 那末只有一个连通成分, 即 E 本身.

2° 在空间 $\mathbb{Q}$ 中, 任何连通子集归结为一点, 于是对于任何 $x\in\mathbb{Q}$, $C(x)=\{x\}$.

3° 在$\mathbb{R}\div\{0\}$中，连通成分为$]-\infty, 0[$和$]0, \infty[$.

4° 在$\mathbb{R}^2$中，子空间$\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$有连通成分为直线$x\times\mathbb{R}$，其中$x\in\mathbb{Q}$.

5° 在$\mathbb{R}^2$中，由双曲线$xy=1$和它的渐近线的并构成的子空间共有三个连通成分.

局部连通空间　定义 13-12　我们说空间E在E的点x上**局部连通**，是指x有连通邻域基.

我们说E局部连通，是指它在每一点上局部连通.

例　1° $\mathbb{R}$和$\mathbb{R}$的任何区间都是局部连通的.

2° 更一般地，$\mathbb{R}^n$的任何凸子集A是局部连通的；事实上，任何点$x\in A$有由A与含x的$\mathbb{R}^n$的开方块的交所组成的凸邻域基.

3° $\mathbb{Z}$是局部连通的.

4° 相反，$\mathbb{Q}$不在任何点上局部连通.

命题 13-13　E局部连通等价于对于E的任何开集ω，ω的连通成分都是开的，

证明　1°　设E局部连通；ω为E的开集；C为ω的一个连通成分.

对于任何$x\in C$，存在包含在ω中的x的连通邻域V；我们显然有$V\subset C$，因此C是x的邻域. 由于C是它的每一点的邻域，故它是开的.

2° 反之，假设E的任何开集的任何连通成分都是开的. 对于任何$x\in E$和任何x的邻域V，含x的$\mathring{V}$的连通成分C是开的；因此C是我们所求的包含在V中的x的连通成分.

例　1° 由于$\mathbb{R}$是局部连通的，对于任何闭集$F\subset\mathbb{R}$，CF的连通成分是开的，于是这是些开区间；这种区间的两个端点属于F。

由于每个这样的区间至少包含一个有理数，且它们都不相交，

故它们的个数是有限或可数无限的.

2° 命题 13-13 提供的准则对于指出一个空间不是局部连通的,常常是很方便的.

例如,考虑定义 13-8 的例 2 中所定义的连续统 $\overline{\Gamma}$. 设 ω 是 $\overline{\Gamma}$ 的定义为 $\omega=\overline{\Gamma}\cap(\mathbb{R}\times]-1/2,1/2[)$ 的开集. ω 的连通成分之一是区间 $0\times]-1/2,1/2[$, 它在 $\overline{\Gamma}$ 中不是开集; 因此 $\overline{\Gamma}$ 不是局部连通的(尽管它在 Γ 的所有点上是局部连通的).

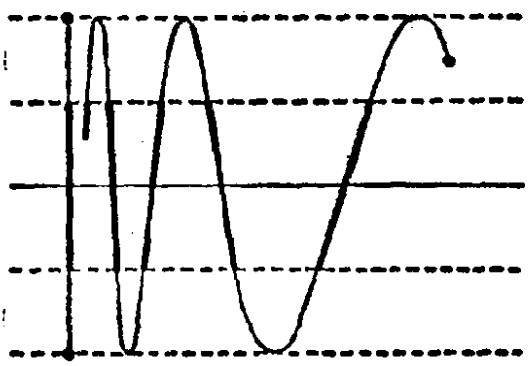


图 2

弧连通性 在许多数学分支中, 我们只利用一种非常正规的连通空间; 例如, 在微分几何中, 所利用的空间一般总是局部同胚于 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^n_+$ 的闭半空间. 这样, 利用弧连通的概念是方便的:

定义 13-14 我们说空间 E *弧连通*, 是指对于任何 $a, b\in E$, 存在 $\mathbb{R}$ 的区间 $[\alpha,\beta]$ 到 E 的连续映射 f, 使得 $f(\alpha)=a$, $f(\beta)=b$.

我们说 E *局部弧连通*,是指 E 的任何点有弧连通邻域基.

由于区间 $[\alpha,\beta]$ 的连续象是连通的, 显然, 任何弧连通空间是连通的; 但反之不成立(可以对上面例 2 的连续统 $\overline{\Gamma}$ 进行验证).

同样,任何局部弧连通空间是局部连通的.

"弧连通"的说法来自: 如果存在 $\mathbb{R}$ 的区间 $[\alpha,\beta]$ 到 E 的连续映射 f, 使得 $f(\alpha)=a$, $f(\beta)=b$(其中 $a\neq b$),那末在 $f([\alpha,\beta])$ 上也存在端点为 a, b 的简单弧. 但这后一性质(并非显然)用得很少,原因在于:

设 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, 且 $\alpha<\beta<\gamma$; f 为 $[\alpha,\gamma]$ 到 E 的映射; 如果 f 在 $[\alpha,\beta]$ 和 $[\beta,\gamma]$ 上的限制是连续的, 那末 f 也连续. 相反, 如果我们此外还要求 f 在 $[\alpha,\beta]$ 和 $[\beta,\gamma]$ 上是双射, 那末它并不能导

致 f 在$[\alpha, \gamma]$上也是双射．利用简单弧连通的定义因而缺乏灵活性．

例 13-15 1° $\mathbb{R}^n$ 的任何区域是弧连通和局部弧连通的．

2° $\mathbb{R}^n$ 的任何凸子集也一样．

3° 设 E 为连通空间；如果 E 局部弧连通，那末它也弧连通（照搬命题 13-10 的证明）．

微分几何中研究的局部 Euclide 流形就是这种情形．

下列性质可以作为练习来验证：

4° 任何弧连通空间的连续象是弧连通的．

5° 对于任何交非空的弧连通集合族(E_i)，E_i 的并是弧连通的．

6° 弧连通空间的有限族的乘积也是弧连通的．

14．拓扑群、拓扑环和拓扑体

拓扑群的概念产生于对诸如加法群 $\mathbb{R}$ 或依赖于有限个参数的变换群（如 $\mathbb{R}$ 的膨胀群 $x\to\lambda x+a$, $\lambda\neq 0$）等特殊情形的研究．在这些不同的例子中，所研究的集合同时具有群结构和拓扑结构，且这两种结构在群运算连续的意义下相容．

更一般地，如果 E 是同时具有拓扑结构和由几种运算定义的代数结构，我们称它为某种拓扑代数结构，是指 E 的代数运算对于给定的拓扑连续，其意义将对每种结构再进一步明确．

拓扑群　定义 14-1　拓扑群 G 是被赋有拓扑的群，对于这个拓扑，函数 x^{-1} 和$(x\top y)$是连续的．

更确切地说，我们假设 G 到 G 的映射 $x\to x^{-1}$ 和 $G\times G$ 到 G 的映射$(x, y)\to x\top y$ 是连续的．

当这些条件满足时，我们还说，给定的拓扑与G的群结构相容．

例 1　被赋有通常拓扑的加法群 $\mathbb{R}$ 是拓扑群．

例 2 设 $\mathbb{R}_+^*$ 是 >0 的实数构成的乘法群. $\mathbb{R}$ 的拓扑在 $\mathbb{R}_+^*$ 上的诱导拓扑与它的群结构相容.

例 3 设 T 为 $\mathbb{R}$ 关于下列等价关系的商群: $x_1 \sim x_2$ 是指 $(x_1 - x_2)$ 是整数; 换句话说(参看第二章) T 是 1 维圆环*).

对于任何 $c \in T$, 置 $|c|$ 为 c 在 $\mathbb{R}$ 上的表示的绝对值的最小值. 于是如果对于 T 的任何元素对 x, y, 置

$$d(x, y) = |x - y|,$$

那末可以验证, 我们这样在 T 上定义了一个距离(见 § 15), 且它对于 T 的平移不变; 与此距离相联系的拓扑是与 T 的拓扑结构相容的.

被赋有这个拓扑的群 T 是 1 维拓扑圆环. 可以验证, 拓扑空间 T 与圆周 S_1 同胚.

例 4 绝对值为 1 的复数 $(a+ib)$ 的乘法群, 被赋以复平面的拓扑的诱导拓扑后, 是拓扑群. 可以证明, 它同构于 T.

例 5 如果把直线上的膨胀群: $x \to \lambda x + a$ (其中 $\lambda \neq 0$) 与平面 $\mathbb{R}^2$ 上横坐标非零的点 (λ, a) 的集合 D 看作一样, 且对 D 赋以 $\mathbb{R}^2$ 的拓扑的诱导拓扑, 则 D 变为拓扑群.

事实上, 如果 $s = (\lambda, a)$, 则有

$$s^{-1} = (\lambda, a)^{-1} = (1/\lambda, -a/\lambda),$$

故 s^{-1} 是 s 在 D 上的连续函数; 另一方面, 如果 $s = (\lambda, a)$ 和 $s' = (\lambda', a')$, 则有 $s \circ s' = (\lambda\lambda', \lambda a' + a)$; 故 $s \circ s'$ 也是对 (s, s') 的连续函数.

例 6 如果 G 是任意群, 对它赋以离散拓扑, 则它也成为拓扑群. 不用说, 这种拓扑一般是没有多大意义的.

---

*) 1 维圆环即圆周. 把圆周在任意点"切断"并"拉直", 那末圆周就变为线段, 但线段的两个端点看作是同一点. 如果令这个线段的长度为 1, 那末这个线段就等价于 T. 2 维圆环即通常的环面("轮胎形"), 它可看作 $\mathbf{R}^2$ 关于 $\mathbf{Z}^2$ 的商群. ——译者注

推论 1° 对称 $x\to x^{-1}$ 是连续的，它的逆就是它自身；因此，这是 G 到自身的同胚.

2° 对于任何 $a\in G$，双射 $x\to a\cdot x$ 以至其逆 $y\to a^{-1}\cdot y$ 都是连续的.

同样，$x\to x\cdot a$ 及其逆也是连续的. 换句话说，任何平移是 G 到自身的同胚. 更一般地，任意变换：$x\to a\times b$ 也是如此.

这两个推论还可以说成：对于任何开集 $\omega\subset G$，对称 ω^{-1} 是开集，ω 的平移 $a\omega$ 或 ωa 也是开集.

一点的邻域 由任何平移是同胚可得，一点 x_0 的邻域集可由中性元 e 的邻域集通过左或右平移 x_0 而导得. 更确切地说，x_0 的邻域集恒同于 $x_0\cdot V$ 或 $V\cdot x_0$[1] 的集合，其中 V 遍历 e 的邻域集.

对 G 的点 x_0 的邻域的研究从而归结为对 e 的邻域的研究.

中性元的邻域 1° 对于 e 的任何邻域 V，对称 V^{-1} 也是 e 的邻域.

2° 对于 e 的任何邻域，存在 e 的子邻域 W，使得

$$W\cdot W^{2)}\subset V.$$

第一条性质由对称是同胚而得. 由此还因为 $V\cap V^{-1}$ 恒同于它的对称，可得 e 具有对称邻域基.

第二条性质只是简单地转述了这样的事实：$G\times G$ 到 G 上的映射 $(x, y)\to x\cdot y$ 在 $G\times G$ 的点 (e, e) 上连续.

此外，这条性质并非是由于 G 的对称和平移都是同胚的缘故. 换句话说，一种使对称和平移都是同胚的 G 上的拓扑，并不一定使 G 上定义了拓扑群的结构.

为了在 G 上定义一种与 G 的群结构相容的拓扑，我们经常如

---

1),2)，即 $V\cdot x_0=\{x\cdot x_0\,|\,x\in V\}$；
$W\cdot W=\{x\cdot y\,|\,x\in W,\ y\in W\}$ ——译者注

下操作：给定含中性元 e 的 G 的子集族 $\mathscr{V}(e)$（这些集合旨在成为 e 的邻域）。对于任何 $x_0\in G$，令 $\mathscr{V}(x_0)$ 为由 $\mathscr{V}(e)$ 通过左位移 x_0 而导得的族 $x_0\cdot\mathscr{V}(e)$。

然后，称任何有下列性质的 G 的子集 ω 为 G 的开集：如果 $x\in\omega$，则存在 $\mathscr{V}(x)$ 的元素包含在 ω 中。

如果这些 ω 的集合满足拓扑空间的公理 O_1，O_2，O_3，我们就定义了 G 上的一种拓扑；如果这种拓扑使 xy 和 x^{-1} 都连续，它就与 G 的结构相容。我们称它是由族 $\mathscr{V}(e)$ 张成的。

拓扑群的乘积 设 G_1 和 G_2 为两个拓扑群。乘积集合 $G=G_1\times G_2$ 同时具有乘积群结构和乘积拓扑空间结构。

容易验证，G 上的乘积拓扑与 G 上的乘积群结构相容；被赋以这两种结构的集合 G 称为拓扑群 G_1 和 G_2 的乘积。

同样可定义任意有限个拓扑群的乘积。

例 1 我们称 n 个恒同于加法拓扑群 $\mathbb{R}$ 的拓扑群的乘积为加法拓扑群 $\mathbb{R}^n$。

我们称 n 个恒同于拓扑圆环 T 的群的乘积 T^n 为 n 维圆环。

例 2 运算 $(n, G)\to G^n$ 是一种更一般的构造拓扑群的程序的特殊情形：

设 E 为任意集合，G 为拓扑群；G^E 为 E 到 G 的所有映射的集合。用对于任何 $x\in E$ 成立的等式 $h(x)=g(x)\cdot f(x)$ 来定义 $h=g\cdot f$，我们就在 G^E 上给出了一种群结构。

对于 e 在 G 上的任何邻域 v，我们令 V 为 G^E 的对于任何 $x\in E$ 满足 $f(x)\in v$ 的元素 f 全体。集合 V 的族 $\mathscr{V}$ 在 G^E 上生成一种拓扑，根据上面叙述的程序，可以验证，这个拓扑与 G^E 的群结构相容。

例 3 $\mathbb{C}^*$ 同构于乘法群 $\mathbb{R}_+^*$ 与 T 的乘积。它的子群 $\mathbb{R}^*$ 同构

于 $\mathbb{R}_+^*$ 与乘法群$\{1, -1\}$的乘积[*].

同构　连续表示　设 E 和 F 为两个拓扑群，f 为 E 到 F 的表示(这就是说，$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$). 我们说这是个连续表示是指映射 f 在 E 上连续.

等式$f(x)=f(x\cdot x_0^{-1})\cdot f(x_0)$指出，如果表示 f 在 E 的点 e 上连续，那末它也在 E 的所有点 x_0 上连续.

如果 f 是群 E 到群 F 的代数同构，且 f 又是同胚，那末我们说，拓扑群 E 和 F 同构.

例 1　加法群 $\mathbb{R}$ 到自身的同构　设 f 是加法群 $\mathbb{R}$ 到自身的连续表示. 置 $f(1)=a$. 由此可导得对于任意的整数 p 和 q, $q\neq 0$, 有 $f(p/q)=a(p/q)$; 换句话说，对于任何有理数 x, 有 $f(x)=a\cdot x$. 由于映射 f 和 $x\to a\cdot x$ 都是连续的，这个等式可延拓到整个 $\mathbf{R}$.

由于映射 $x\to a\cdot x$ 就是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的表示，故 $\mathbf{R}$ 到自身的连续表示即映射 $x\to a\cdot x$. 除了 $a=0$ 以外，这样的表示总是同构.

注意，还存在许多不同于上述的 $\mathbb{R}$ 到自身的非连续表示；但它们的存在并不明显；我们只知道用选择公理[**]来构造它.

例 2　由第三章的一个命题可得乘法拓扑群 $\mathbb{R}_+^*$ 与加法拓扑群 $\mathbb{R}$ 同构[***]. $\mathbf{R}_+^*$ 到 $\mathbb{R}$ 的任何同构由定义是一个对数函数；对数函数的逆同构是指数函数.

---

[*] $\mathbf{C}^*$ 表示非零复数全体；$\mathbf{R}^*$ 表示非零实数全体；$\mathbf{R}_+^*$ 表示正实数全体. ——译者注

[**] 关于选择公理可参看任何一本集合论方面的著作. 本书的特点之一在于几乎所有结果都不利用选择公理. 不过，这样也不得不把有些重要结果，例如，Hahn-Banach 定理，放到习题中去. 这里所说的结果参看 180 页译者注. ——译者注

[***] $\mathbf{R}_+^*$ 到 $\mathbf{R}$ 的同构 f 由下列函数方程的解来决定:

$$f(xy)=f(x)+f(y)\quad \forall x, y\in \mathbf{R}_+^*.$$

那末设 $a\in\mathbf{R}_+^*$ 满足 $f(a)=1$, 易证对于任何有理数 p/q, $q\neq 0$, 有 $f(a^{p/q})=p/q$, 再利用连续性，可知 f 为以 a 为底的对数函数. ——译者注

例 3 例 1 的方法不难推广到 $\mathbb{R}^n$，并可指出，$\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的任何连续表示是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性映射；我们已经研究过这种映射.

例 4 T 到自身的连续同构 我们建议作为练习，证明 T 到自身的任何连续映射有形式为：$x \to n \cdot x$，其中 n 为任意整数. 由此得到，只存在两种 T 的连续自同构：恒等和对称.

拓扑群上的连续周期函数 **定义 14-2** 设 G 为加法交换群，f 为 G 到集合 E 的映射. 对于所有 $x \in G$，我们称满足 $f(x+a) = f(x)$ 的 G 的每个元素 a 为 f 的*周期*.

直接可得，f 的周期全体 P 构成 G 的子群，它称为 f 的周期群.

我们说 f 是*周期的*，是指它的周期群不归结为 G 的中性元 0.

命题 14-3 拓扑群 G 到分离拓扑空间 E 的连续映射 f 的周期群 P 在 G 中是闭的

事实上，对于任何 $b \in G$，令 G_b 为满足 $f(b+a) = f(b)$ 的 $a \in G$ 的集合；由于 G 到 E 的映射 φ_b: $a \to f(b+a)$ 是连续的，且 $\{f(b)\}$ 在 E 中闭，故集合 $\varphi_b^{-1}(\{f(b)\}) = G_b$ 是闭的. 而由定义

$$P = \bigcap_{b \in G} G_b,$$

因此 P 是闭的.

$\mathbb{R}$ 的闭子群 上述结果指出，为了研究拓扑群上的周期函数，研究 G 的闭子群是有意义的. 我们将仅对 $\mathbb{R}$ 进行这一研究.

命题 14-4 $\mathbb{R}$ 的任何闭子群或者恒同于 $\mathbb{R}$，或者恒同于 $\{0\}$，或者是形为 $a \cdot \mathbb{Z}$ 的离散子群，其中 $a > 0$.

设 P 为 $\mathbb{R}$ 的闭子群.

如果 0 是 P 的聚点，则对于任何 $\varepsilon > 0$，存在 P 的元素 x，使得 $x \neq 0$，且 $|x| < \varepsilon$；在 $\mathbb{R}$ 的长度 $> \varepsilon$ 的任何区间里，至少存在一个这种 x 的整数倍；换句话说，P 在 $\mathbb{R}$ 上处处稠，而由它是闭的，故有 $P = \mathbb{R}$.

如果0是P的孤立点，则P的任何点都是孤立点，于是由P是闭的，每个集合$P\cap[-l, l]$是紧的和离散的，因而是有限的．因此，或者有$P=\{0\}$，或者P的>0的元素集合有最小元，设它为a．

a的整数倍群$a\cdot\mathbb{Z}$包含在P中；如果$P\dot{-}a\cdot\mathbb{Z}$非空，那末存在$x\in P$和整数n，使得$a(n-1)<x<an$；因此对于P的元素$(an-x)$，我们将有$0<(an-x)<a$，由a的选取，这是不可能的．

因此，我们有$P=a\cdot\mathbb{Z}$．

注 1 如果G是$\mathbb{R}$的非闭子群，则它必定在$\mathbb{R}$中处处稠；事实上由假设，$\overline{G}$是不同于G的闭群，因此G不可能是离散的；从而只可能是$\mathbb{R}$．

下面是一个这样的群的例子：由两个比为无理数的非零数a，b所生成的元素$(ap+bq)$的群G．

注 2 设f为$\mathbb{R}$上的连续周期函数，p为f的周期群．

如果$P=\mathbb{R}$，则f在$\mathbb{R}$上是常数．

如果$P=a\cdot\mathbb{Z}$，则只要f在$[0, a[$上或者在任何形为$[x_0, x_0+a[$或$]x_0, x_0+a]$上的限制已知，f也就已知．

周期a称为f的最小周期．

一致结构[*] **一致连续** 在拓扑群G中，我们不仅可以说一个给定点邻近的诸点，并且可以更一般地谈论一个集合有多么小．

事实上，对于G的中性元e的任何邻域V和任何G的子集A，我们可以说A为V阶小，意为对于任何$x, y\in A$，我们有$xy^{-1}\in V$．

这个基本事实使我们可引入函数的一致连续的概念；这一概

---

[*] 本书始终没有对一般的一致结构提出定义．需要对一致结构有进一步了解的读者可参看例如：

J. L. Kelley, General Topology, VanNostrand Company, 1955.（有中译本）．——译者注

念在研究距离空间时我们将重新在邻域的形式下提出.

定义 14-5 设 X 和 Y 为两个拓扑群，为了简单起见，我们假设它们都是交换的，f 为 X 到 Y 的映射. 我们说 f 一致连续，是指对于 Y 的任何零邻域 W，存在 X 的零邻域 V，使得任何 V 阶小的 $A\subset X$，有 W 阶小的象 $f(A)$.

我们还可把这一条件表达为:

$$((x_1-x_2)\in V)\Rightarrow((f(x_1)-f(x_2))\in W).$$

例 设 G 为交换拓扑群，V 为 G 上的 0 的任意对称邻域.

1° 关系式 $-(a+V)=-a-V=-a+V$ 指出，任何 V 阶小的集合的对称是 V 阶小的；因此，G 到 G 的映射 $x\to -x$ 是一致连续的.

2° $G\times G$ 到 G 的映射 f: $(x, y)\to(x+y)$ 在点 $(0, 0)$ 的连续性导致存在 G 上 0 的邻域 W，使得 $W+W$[1]$\subset V$.

既然对于任何 $a,\ b\in G$，G 的满足 $x\in(a+W)$[2] 和 $y\in(b+W)$ 的 $(x+y)$ 的全体包含在 $(a+b)+V$ 中，故它是 V 阶小的.

因此，映射 f 一致连续.

Z 乘法群 $\mathbb{R}^*$ 的拓扑是加法群 $\mathbb{R}$ 的拓扑在 $\mathbb{R}^*$ 上的迹，因此定义在拓扑群 $\mathbb{R}^*$ 上或取值在这个群上的连续函数与定义在 $\mathbb{R}$ 的子空间 $\mathbb{R}^*$ 上或取值在这个子空间上的连续函数是一回事；例如 x^{-1} 和 xy 对于 $\mathbb{R}$ 的拓扑在 $\mathbb{R}^*$ 上连续. 但是在涉及一致连续性时，情况完全改变了.

例如，乘法群 $\mathbb{R}^*$ 到加法群 $\mathbb{R}$ 的恒等映射 $x\to x$ 不是一致连续的；事实上，对于 $\mathbb{R}^*$ 的中性元的任何邻域 W，W 的平移是集合 λW，而显然在 $\mathbb{R}$ 上不存在任何 0 的邻域 V，使得所有这些 λW 是 V 阶小的.

---

1), 2) 即 $W+W=\{x+y\mid x\in W,\ y\in W\}$;
$a+W=\{a+x\mid x\in W\}$. ——译者注

同样，对在 $\mathbb{R}^*$ 上建立的与它的群结构相应的一致结构，甚至对由 $\mathbb{R}$ 的一致结构诱导的一致结构而言；$\mathbb{R}^*$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $x\to x^{-1}$ 也不是一致连续的；这个结论也可推广到映射 $(x, y)\to xy$.

拓扑环 **定义 14-6** 拓扑环 A 是被赋有拓扑的环*)，对于这个拓扑，函数$(-x)$，$(x+y)$和 $x\cdot y$ 都是连续的.

更确切地说，我们假设 A 到 A 上的映射 $x\to -x$ 和 $A\times A$ 到 A 的映射$(x, y)\to x+y$ 与 $x\cdot y$ 都是连续的**).

当这些条件满足时，我们说 A 上的拓扑与 A 的环结构相容.

特别是，对于任何拓扑环 A，A 的拓扑与 A 的加法群结构相容.

拓扑环的例子 1° 对于任何环 A，如果我们对 A 赋以离散拓扑，我们就得到一个拓扑环，不过一般它是无意义的.

2° 设 A 是环，其上定义了取非负实值的函数 φ，且它满足：

$$\varphi(0)=0,\ \varphi(x)>0 \text{ 当 } x\neq 0,$$

$$\varphi(-x)=\varphi(x);\ \varphi(x+y)\leqslant\varphi(x)+\varphi(y);$$

$$\varphi(x\cdot y)\leqslant\varphi(x)\cdot\varphi(y).$$

对于任何 $x, y\in A$，我们置 $d(x, y)=\varphi(x-y)$. 直接可得 d 是 A 上的距离. 然后可以验证 A 上的与这个距离相联系的拓扑(参看 § 15, § 16)与 A 的环结构是相容的.

特殊情形 a) A 是有 $\varphi(x)=|x|$ 的实数环 $\mathbb{R}$；

b) A 是有 $\varphi(f)=\sup|f(x)|$ 的定义在$[0, 1]$上的实连续函数环；

c) A 是取复元素的 n 阶方阵环；如果 a_i^j 是矩阵 $m\in A$ 的元素，令

---

*) 集合 A 称为环，是指其上定义了加法和乘法两种代数运算；对于加法，A 形成交换群，而对于乘法，它与加法一起满足分配律：$\forall x, y, z\in A$，$x(y+z)=xy+xz$，$(y+z)x=yx+zx$. ——译者注

**) 原文中此段的 A 都作 G. 有误. ——译者注

$$\varphi(m)=\sum_{i,j}|a_i^j|.$$

d) 设 A 是复系数单变量多项式环. 我们这样取 A 上的拓扑: A 的零有集合 $V(\varepsilon, n)$ ($\varepsilon>0$, $n\geqslant 0$ 整数) 作为邻域基, 其中 $V(\varepsilon, n)$ 表示对于任何 $i\leqslant n$, 满足 $|a_i|\leqslant\varepsilon$ 的多项式 $a_0+a_1x+\cdots$ 全体.

拓扑体　定义 14-7　拓扑体 K 是被赋有与 K 的环结构相容的拓扑的体*), 且对于该拓扑, K^* 到 K 的映射 $x\to x^{-1}$ 是连续的 (其中 K^* 表示 K 中的不同于 0 的元素全体).

当体 K 上的拓扑满足这些条件时, 我们说它与 K 的体结构相容.

拓扑体的例　1° 被赋有 $\mathbb{R}$ 上的拓扑的实数体 $\mathbb{R}$.

2° $\mathbb{R}$ 的有理数子体 $\mathbb{Q}$.

3° 复数体 $\mathbb{C}$, 其上的拓扑是通过对应

$$(a+ib)\to(a, b)$$

由 $\mathbb{R}^2$ 的拓扑转移到 $\mathbb{C}$ 上而得.

这个拓扑与 $\mathbb{C}$ 的体结构相容是因为有下列绝对值的性质:

$$|-z|=|z|,\ |z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\ |z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|.$$

我们也可给出一个更一般的陈述:

4° 设 K 是体, $|x|$ 是定义在 K 上的非负实数函数, 不恒等于 0 或 1, 且具有下列性质:

$$|-x|=|x|,\ |x+y|\leqslant|x|+|y|,\ |x\cdot y|=|x|\cdot|y|.$$

不难由这些性质得到, $|e|=1$, 对于 $x\neq O$, $|x|\neq 0$, 且 $|O|=0$.

我们说这样的函数是 K 上的绝对值. 置 $d(x, y)=|x-y|$, 我们就使它联系了 K 上的一个距离.

初等运算指出, 与这个距离相联系的拓扑是与 K 的体

*) 集合 K 称为体, 是指它首先是环, 同时它的所有非零元素对于乘法形成群. ——译者注

结构相容的.

当 K 是体 $\mathbb{C}$, 与绝对值相联系的拓扑恒同于上面例3中定义的拓扑.

四元数体是另一个被赋有由

$$|a+bi+cj+dk|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^{1/2}$$

定义的绝对值的体的例子.

拓扑向量空间 我们将在另一章研究赋范向量空间，它是拓扑向量空间的重要例子.

III 距离空间

在拓扑空间中，邻域的概念用来明确在一点的周围一个集合有多么小，即所谓集合之小的阶由此得出收敛性和连续性的概念.

在拓扑群中，平移可使这做得更好：一个集合有多么小可通过平移把它与中性元的邻域相比较来明确；于是我们可以谈论函数的一致连续性.

我们将在距离空间中重新发现类似的可能性(距离空间的一般定义是 M. Fréchet 给出的)；然而在这类空间中，两点的靠近程度不再通过参考空间的一个特殊点的邻域来确定，而是通过依赖这两个点的一个数来确定.

15. 距离和拟距离

定义 15-1 所谓距离空间是由任何集合 E 和 $E\times E$ 到 $\mathbb{R}_+$ 上的映射 $(x, y)\to d(x, y)$ 所组成的对，这一映射具有下列性质：

M_1: $(x=y)\Leftrightarrow(d(x, y)=0)$;

M_2: $d(x, y)=d(y, x)$ (对称性);

M_3: $d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(z, y)$ (三角形不等式).

函数 d 称为距离，而 $d(x, y)$ 称为点 x, y 之间的距离.

例 1° 在 $\mathbb{R}$ 中，映射 $(x, y)\to|x-y|$ 是常用的距离.

2° 更一般地，设 G 为交换群，$x\to p(x)$ 为 G 到 $\mathbb{R}_+$ 的映射，满足

$$(p(x)=0)\Leftrightarrow(x=O);\ p(-x)=p(x);\ p(x+y)\leqslant p(x)+p(y).$$

如果对于任何 $x, y\in G$，置 $d(x, y)=p(x-y)$，直接可得 d 满足公理 M_1, M_2; 另一方面，关系式

$(x-y)=(x-z)+(z-y)$ 导致 $p(x-y)\leqslant p(x-z)+p(z-y)$，从而

$$d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(z, y).$$

因此，d 就是 G 上的距离.

3° 设 E 为任意集合，置

$$d(x, y)=0 \text{ 当 } x=y;\ d(x, y)=1 \text{ 当 } x\neq y.$$

直接可得 d 是 E 上的距离; 有时它可用来方便地构造反例.

Z 注意，集合 E 的距离不是定义在 E 上的函数，而是定义在 E^2 上的函数; 在研究距离的性质时，必须记住这点.

集合上的拟距离 利用比距离的概念限制较少的拟距离概念，经常比只研究距离要方便.

定义 15-2 所谓集合 E 上的**拟距离**，是指任何满足下列条件的 $E\times E$ 到 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 的映射:

E_1: $(x=y)\Rightarrow(f(x, y)=0)$;

E_2: $f(x, y)=f(y, x)$;

E_3: $f(x, y)\leqslant f(x, z)+f(z, y)$.

与距离概念仅有的差别因而在于 f 可取值 $+\infty$ 以及两个不同点可以有零拟距离. 因此为了看出拟距离 f 是否为距离，只需验证任何 $f(x, y)$ 是否有限以及是否有

$$(x\neq y)\Rightarrow(f(x, y)\neq 0).$$

例. 设 α 是 E 到 $\mathbb{R}$ 的映射; 由

$$f(x, y)=|\alpha(x)-\alpha(y)|$$

定义的函数 f 是拟距离.

例如, 当 E 是[0, 1]上的数值函数的集合且 $a\in[0, 1]$时, 定义为

$$f_a(x, y)=|x(a)-y(a)|$$

的函数 f_a 是 E 上的拟距离.

拟距离的运算 拟距离的好处在于对它进行最一般的运算, 仍能保持拟距离性; 这一灵活性使它用起来非常方便.

1° 任何拟距离族的和仍是拟距离.

特别是任何距离的有限和是距离.

2° 任何拟距离的极限是拟距离.

3° 任何拟距离的上包络是拟距离.

事实上, 设 $f(x, y)=\sup f_i(x, y)$, 其中 $f_i(x, y)$ 是拟距离. E^2 到 $\mathbb{R}_+$ 的映射 f 显然符合公理 E_1, E_2; 另一方面, 对于任何 i, 有

$$f_i(x, y)\leqslant f_i(x, z)+f_i(z, y)\leqslant f(x, z)+f(z, y);$$

故
$$f(x, y)\leqslant f(x, z)+f(z, y).$$

因此 f 就是拟距离. 特别是, 如果 f_i 只有有限个, 且都是距离, 那末 f 也是距离.

4° 设 α 是集合 E 到被赋有拟距离 f 的集合 F 的映射. 对于任何 $x, y\in E$, 置

$$e(x, y)=f(\alpha(x), \alpha(y)).$$

直接可得 e 是 E 上的拟距离; 我们称它为 f 通过映射 α 的逆象.

5° 我们说, $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的映射 φ 为规范, 是指它递增, 且

$$\varphi(0)=0, \varphi(x+y)\leqslant\varphi(x)+\varphi(y)\text{（次可加性）}.$$

可以验证, 规范族对下列运算是不变的: 加法, 取简单极限, 上包络, 复合: $(\varphi_1, \varphi_2)\to\varphi_1(\varphi_2)$.

任何满足 $\varphi(0)=0$ 的递增凸函数*)是规范；事实上，φ 的凸性导致

$$\varphi(u+v)-\varphi(0+v)\leqslant\varphi(u)-\varphi(0),$$

故
$$\varphi(u+v)\leqslant\varphi(u)+\varphi(v).$$

特别是函数 $x/(1+x)$ 和 $\inf(x, 1)$ 是规范.

对于任何规范和任何集合 E 上的拟距离 f, $\varphi(f)$ 也是 E 上的拟距离：性质 E_1, E_2 是明显的；另一方面，对于任何 $x, y, z\in E$, 置：

$$a=f(x, y);\ b=f(x, z);\ c=f(y, z).$$

关系式 $a\leqslant b+c$ 导致 $\varphi(a)\leqslant\varphi(b+c)\leqslant\varphi(b)+\varphi(c)$.

关系式 $\varphi(a)\leqslant\varphi(b)+\varphi(c)$ 证明了性质 E_3.

6° 更一般地我们可以定义 $(\overline{\mathbb{R}}_+)^n$ 上的规范：定义这个集合的序关系如下：当对于任何 i, 有 $x_i\leqslant y_i$ 时，就置 $x\leqslant y$ $(i=1, 2, \cdots, n)$；且当对于任何 i, 有 $z_i=x_i+y_i$ 时，定义 $z=x+y$.

于是所谓 $(\overline{\mathbb{R}}_+)^n$ 上的规范是指该集合到 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 上的每一个这样的映射 φ, 它递增且满足

$$\varphi(0)=0,\ \varphi(x+y)\leqslant\varphi(x)+\varphi(y).$$

任何在 $\mathbb{R}_+^n$ 上递增、凸、一次正齐次函数**)就是这样的规范；事实上，凸性给出

$$\varphi((x+y)/2)\leqslant\frac{1}{2}(\varphi(x)+\varphi(y)), \text{故}\ \varphi(x+y)=2\varphi((x+y)/2)$$
$$\leqslant\varphi(x)+\varphi(y).$$

例如，当 (x_i) 为 x 的坐标时，函数

---

*) 关于凸函数的定义和性质参看第六章的 §§16–18. 根据第六章的命题 17-1, 函数 φ 为凹函数的充要条件为 $p(x, y)=\dfrac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}$ 是 x, y 的递增函数. 从而易证对于固定的 u, $\varphi(x+u)-\varphi(x)$ 是 x 的递增函数，因此有正文中的不等式. ——译者注

**) φ 是一次正齐次函数是指 φ 满足：$\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$, $\forall\lambda\in\mathbf{R}_+$. ——译者注

$$x \to (\sum x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

具有这些性质，因而是一个规范；同样，更一般的

$$(\sum x_i^p)^{1/p} \quad (p \geqslant 1)$$

也都是规范.

$(\overline{\mathbb{R}}_+)^n$ 上的规范可用来方便地产生拟距离：事实上，如果 $f_1, \cdots, f_n$ 是集合 E 上的拟距离，φ 是 $(\overline{\mathbb{R}}_+)^n$ 上的规范，如同 $n=1$ 那样，可以验证，$\varphi(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 是 E 上的拟距离.

例如，$(\sum f_i^2)^{\frac{1}{2}}$ 就是一个拟距离.

拟距离运算的应用 1° **$\mathbb{R}^n$ 的经典距离** 我们以 (x_i) 表示 $\mathbb{R}^n$ 的点 x 的坐标. 对于任何 i，置

$$d_i(x, y) = |x_i - y_i|;$$

这是 $\mathbb{R}$ 的距离通过映射 $x \to x_i$ 的逆象；因而它是 $\mathbb{R}^n$ 上的拟距离.

由前所述，函数

$$d(x, y) = (\sum_i (x_i - y_i)^2)^{1/2}; \; d'(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|;$$

$$d''(x, y) = \sum_i |x_i - y_i|$$

都是 $\mathbb{R}^n$ 上的拟距离；由于它们都是有限的，且仅当 $x=y$ 时才为零，故它们都是 $\mathbb{R}^n$ 上的距离；它们中的每一个都对于 $\mathbb{R}^n$ 的平移不变.

可以验证，这些距离的任意两个的比都是有界的，更确切地说，有

$$d' \leqslant d \leqslant d'' \leqslant nd'.$$

2° **距离空间的乘积** 设 (E_i) 为被赋以距离 d_i 的距离空间的有限族.

在 E_i 的乘积 E 上，每个函数 $(x, y) \to d_i(x_i, y_i)$ 是拟距离；因而如同上述例子一样，函数

$$d(x, y) = (\sum_i d_i^2(x_i, y_i))^{1/2}; \; d'(x, y) = \sup_i d_i(x_i, y_i);$$

$$d''(x, y)=\sum_i d_i(x_i, y_i)$$

都是 E 上的拟距离；直接可得这些都是距离，且它们在下列意义下是可比较的：

$$d'\leqslant d\leqslant d''\leqslant nd'$$

(其中 n 是 E_i 的个数)。

根据不同情况，我们利用这些距离中的某一个；第一个距离 d 仅当空间 E_i 为向量空间，距离 d_i 由纯量积[*]导出时，才予使用；我们称它为 Descartes 或 Euclide 距离；被赋有这样距离的空间 $\mathbb{R}^n$ 称为 n 维 Euclide 空间。

3° 设 E 为距离空间，d 为它的距离。

函数 $d'=d/(1+d)$ 和 $d''=\inf(d, 1)$ 也是 E 上的距离。

我们有 $d'\leqslant d''\leqslant 2d'$，故这些距离是可比较的。我们可看出，它们使 E 有与 d 给出的一样的拓扑和一样的"一致结构"，而由于它们都 $\leqslant 1$，所以经常有引人注目的方便之处。

4° 设 E 为集合 A 到被赋有距离 d 的距离空间 B 的映射全体。

我们知道，对于任何 $a\in A$，$d(x(a), y(a))$ 是 E 上的拟距离；这个拟距离度量了函数 x，y 在点 a 上的接近程度。

更一般地对于每个 $X\subset A$，置：

$$d_X(x, y)=\sup_{a\in X} d(x(a), y(a)).$$

这是 E 上的拟距离，它度量函数 x，y 在 X 上的接近程度；特别是 d_A 是 E 上的仅当 $x=y$ 时为零的拟距离；因此，如果此外还有 $d\leqslant 1$，我们也有 $d_A\leqslant 1$，故 d_A 是距离。

在研究一致收敛时，我们将利用这些距离。

现在我们将要引入的大多数概念都可用明显的方式推广到被

[*] 有纯量积的向量空间称为 pre-Hilbert 空间，或内积空间。其定义参看第七章 §14。——译者注

赋有一个拟距离的集合；但我们仅当它有用时才把它明确作出.

距离空间的距离子空间　定义 15-3　设 E 为由距离 d 定义的距离空间，A 为 E 的子集. 所谓 E 的距离子空间是指被赋以由 $d_A(x, y)=d(x, y)$ 定义的距离 d_A 的集合 A，这里 $x, y\in A$.

换句话说，d_A 是 d 在 E^2 的子集 A^2 上的限制. 这个定义为我们提供了大量的距离空间的例子：例如，当 $\mathbb{R}^n$ 被赋以上面定义的距离之一，$\mathbb{R}^n$ 的任何子集就成为 $\mathbb{R}^n$ 的距离子空间.

等距　定义 15-4　设 E, E' 为两个被赋以距离 d 和 d' 的两个距离空间；$f: x\to x'$ 为 E 到 E' 上的双射.

我们说 f 是等距，是指对于任何 $x, y\in E$，有

$$d(x, y)=d'(x', y').$$

因而等距无非就是对于距离空间结构的同构.

例　1° 在被赋以形为 $d(x, y)=p(x-y)$ 的距离 d 的交换群中，对称和任何平移都是等距.

2° 在被赋以其经典距离之一的空间 $\mathbb{R}^n$ 中，任何直线是等距于数直线 $\mathbb{R}$ 的子空间.

3° 可以证明，Euclide 空间 $\mathbb{R}^n$ 到自身的保持原点的等距无非就是 $\mathbb{R}^n$ 的保持二次型 $\sum x_i^2$ 的线性变换.

开球、闭球、球面　定义 15-5　在任何距离空间 E 中，所谓中心为 a、半径为 ρ（$\rho\geqslant 0$ 或为 $+\infty$，而 $a\in E$）的开球（相应地，闭球）是指满足 $d(a, x)<\rho$（相应地，$\leqslant\rho$）的 E 的点 x 全体 $B(a, \rho)$.

当 E 是 Euclide 平面 $\mathbb{R}^2$ 时，我们经常把球这个词换为圆盘.

所谓中心为 a、半径为 ρ 的球面是指满足 $d(a, x)=\rho$ 的 E 的点集 $S(a, \rho)$.

当 E 是 Euclide 平面 $\mathbb{R}^2$ 时，我们经常把球面这个词换为圆周.

例. 被赋以距离 $d'(x, y)=\sup|x_i-y_i|$ 的 $\mathbb{R}^n$ 中，球 $B(a, \rho)$

是边平行于坐标轴的立方体.

直接可得,任何中心为 a 的开球的并仍是开球; 同样, 任何中心为 a 的闭球的交仍是闭球.

这里必须注意, 空间 E 的球和球面一般没有 $\mathbb{R}^n$ 的球和球面的任何几何性质. 为了说明这点, 只需取 E 为 $\mathbb{R}^n$ 的任意距离子空间就行了.

直径　两个集合间的距离　定义 15-6　所谓距离空间E的子集 A 的**直径**,是指距离 $d(x, y)$的上确界 $\delta(A)$, 这里 x 和 $y \in A$.

我们说 A 是**有界的**,是指它的直径有限.

对于任何集合 X 到距离空间 E 的映射f, 所谓 f 在 X 的子集 Y 上的**振幅**是指 $f(Y)$的直径.

例　1° 平面三角形的直径为它的最长边的长度.

2° 半径为 ρ 的 $\mathbb{R}^n$ 的球的直径为 2ρ; 相反, 在任何直径为 ρ_0 的距离空间中,任何半径 $\rho>\rho_0$ 的球的直径等于 ρ_0.

直接可得,距离空间的有界子集无非就是有限半径的球的子集; 两个有界集的并也是有界集; 且

$$(A\cap B\neq \phi)\Rightarrow(\delta(A\cup B)\leqslant\delta(A)+\delta(B)).$$

定义 15-7　设 A, B 为两个被赋以距离 d 的距离空间 E 的子集. 所谓 A 和 B 之间的**距离**是指距离 $d(x, y)$的下确界, 这里 $x\in A$, $y\in B$.

特别是,对于任何 $x\in E$, 所谓 x 到 B 的距离为数 $d(x, B)=d(\{x\}, B)=\inf\limits_{y\in B} d(x, y)$.

例　1° 在 Euclide 平面上, 点到直线 D 的距离等于该点与它在 D 上的射影间的距离.

2° 在 $\mathbb{R}$ 中, $\mathbb{Q}$ 与 $C\mathbb{Q}$ 之间的距离为零.

3° 双曲线的一支到它的渐近线的距离是零.

Z 尽管 $d(A, B)$ 称为 A, B 间的距离，但它既不是 E 的子集集合的距离，甚至都不是拟距离，因为三角形不等式不成立：例如，当

$$A=[0, 1],\ B=[1, 2],\ C=[2, 3],$$

我们有
$$d(A, B)=d(B, C)=0,$$
而
$$d(A, C)=1.$$

16. 距离空间的拓扑

在被赋有距离空间结构的集合 E 上，所有可能定义的拓扑中，有一个拓扑直接与距离相联系，它称为距离空间 E 的拓扑.

定义 16-1 在距离空间 E 中，我们说 E 的子集是开集，是指它是空的，或者对于任何 $x\in A$，存在中心为 x、半径非零的开球包含在 A 中.

直接可得，E 的开集全体满足拓扑空间的公理 O_1, O_2, O_3；用这些开集定义的 E 上的拓扑称为距离空间 E 的拓扑.

任何开球是开集. 这当 $\rho=0$ 时是显然的. 当 $\rho>0$，设 $x\in B(a, \rho)$；则开球 $B(x, (\rho-d(a, x)))$ 包含在 $B(a, \rho)$ 中，因为

$$d(x, y)<\rho-d(a, x) \text{导致} d(a, y)\leqslant d(a, x)+d(x, y)<\rho.$$

由此得到，任何开球的并是开集. 反之，开集的定义导致任何开集是开球的并. 这样，E 的开集和开球的并是一回事.

命题 16-2 任何距离空间的拓扑是分离的.

事实上，如果 x 和 y 是 E 的两个不同点，开球 $B(x, \rho)$ 和 $B(y, \rho)$（其中 $\rho\leqslant d(x, y)/2$）就构成 x, y 的两个不相交的邻域.

系 距离空间 E 的点列（或更一般地，E 的滤子基）至多只能有一个极限点.

Z 注意，集合 E 上的拓扑也可联系 E 上的拟距离 d 用类似于定义 16-1 的方式来定义，；当条件

$$(d(x, y)=0)\Rightarrow(x=y)$$

满足，它也是分离的。

更一般地，对于任何拟距离，我们可以分离两个满足 $d(x, y)\neq 0$ 的点 x, y；相反，如果 $d(x, y)=0$，任何 x 的邻域包含 y，反之也然。

命题 16-3 任何距离空间的点有可数邻域基。

更确切地说，对于任何 $\rho_n>0$ 且趋向于 0 的数列 (ρ_n)，开球或闭球 $B(a, \rho_n)$ 就构成 a 的邻域基。事实上，任何含 a 的开集包含一个 $\rho>0$ 的球 $\mathring{B}(a, \rho)$，因此也包含一个球 $B(a, \rho_n)$；另一方面，任何 $B(a, \rho_n)$ 也正是 a 的邻域。

下面是这条性质的几个推论：

命题 16-4 设 E 为距离空间，A 为 E 的子集。则

$$(a\in\overline{A})\Leftrightarrow(d(a, A)=0)\Leftrightarrow(\text{存在 } A \text{ 的收敛于 } a \text{ 的点列 } (x_n)).$$

关系式 $a\in\overline{A}$ 和 $d(a, A)=0$ 都等价于 $A\cap B(a, V_n)$ 对于任何 n 非空；因此它们相互也等价。由它们也可导得，对于任何整数 n，存在 A 在 $B(a, 1/n)$ 中的点 x_n。点列 (x_n) 显然收敛于 a。

逆命题对于任何拓扑空间成立。

命题 16-5 设 E 为距离空间，(x_n) 为 E 的点列。则

$(a$ 是点列 (x_n) 的附着值$)\Leftrightarrow($存在收敛于 a 的子列 $(x_{n_i}))$。

证明完全与上面的类似。

现在下面是一个非常有用的命题：

命题 16-6 设 E 为距离空间，A 为 E 的子集，f 为 A 到拓扑空间 F 的映射。

对于任何 $a\in\overline{A}$ 和 $b\in F$，下列性质等价：

1° 对于任何趋向于 a 的 A 的点列 (x_n)，$\lim f(x_n)=b$；

2° $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$。

证明 我们来证明,(1)⇒(2).

事实上,如果 $f(x)$ 当 x 趋向于 a 时不趋向于 b, 那末存在 b 的邻域 V, 使得对于任何 a 在 A 中的邻域 v, 有 $f(v)\not\subset V$; 特别是存在点 $x_n\in A\cap B(a, V_n)$, 使得 $f(x_n)\notin V$; 点列 (x_n) 收敛于 a, 而 $f(x_n)$ 不收敛于 b. 这与假设矛盾.

逆命题(2)⇒(1)在任何拓扑空间中成立.

系 16-7 距离空间 E 到拓扑空间 F 的映射 f 在点 a 连续, 等价于对于任何 E 的收敛于 a 的点列 (x_n), 点列 $(f(x_n))$ 收敛于 $f(a)$.

这是上述命题的特殊情形.

系 16-8 距离空间 E 到拓扑空间 F 的映射 f 在 E 上连续, 等价于 f 在 E 的任何紧集上的限制连续.

正命题是显然的. 反之,假设 f 在任何紧集上的限制连续; 对于任何 $a\in E$ 和任何趋向于 a 的序列 (x_n), 集合 $\{a, x_1, x_2, \cdots\}$ 是紧集,故 $f(x_n)$ 趋向于 $f(a)$. 根据上一系, f 连续.

函数在一点上的振幅 **定义 16-9** 设 f 为拓扑空间 E 到距离空间 F 的映射. 对于任何 $a\in E$, 所谓 f 在 a 上的振幅, 是指, $\mathbb{R}_+$ 中的这样的元素, 它等于 f 在 a 的邻域 V 上的振幅的下确界; 换句话说, 它等于 $\inf\delta(f(V))$, 其中 V 遍历 $\mathscr{V}_a$.

例如, 可以验证, 这个振幅为零等价于 f 在 a 上连续.

用类似的方式可以定义 f 在使 $a\in\overline{A}$ 的 E 的子集 A 上对于 a 的振幅.

距离和拓扑之间的关系 我们已经对一个集合上的距离联系一种拓扑. 有时, 利用该距离来研究 E 的拓扑性质是很方便的; 例如, 对于 E 的任何点 x, 中心为 x 的诸球组成 x 的邻域基, 由此可导得下列等价性质

对于 E 的任何点列 (x_n),

$$(\lim x_n = a) \Leftrightarrow (\lim d(a, x_n) = 0).$$

对于 E 到距离空间 F 的任何映射 f, f 在点 a 上的连续性等价于下列条件:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ 使得 $(d(a, x) < \eta) \Rightarrow (d(f(a), f(x)) < \varepsilon)$.

然而,滥用距离往往会使证明变繁,并且掩盖了现象的真正起因.

产生这种情况的部分原因在于集合 E 上的许多不同的距离可以联系同一个拓扑;因此,这些距离并不是研究这一拓扑的内在的工具.

另一个使距离的应用受到限制的原因在于某些在研究最经典的典型问题中非常有用的拓扑空间不是可距的[*], 即不能通过距离来定义.

我们将通过某些陈述来明确距离和拓扑之间的关系.

命题 16-10 设 d, d' 为集合 E 上的两个距离.

如果它们同时趋向于零(意义为对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得 $(d(x, y) < \eta)$ 导致 $(d'(x, y) < \varepsilon)$, 反之亦然), 那末联系 d 和 d' 的拓扑恒同.

事实上, 由假设可得, 被赋有与 d 相联系的拓扑的 E 到被赋有与 d' 相联系的拓扑的 E 上的映射 $x \to x$ 是双方连续的, 因而是同胚.

例 1° 对于 E 上的任何距离 d, E 上联系距离 d, $d/(1+d)$, $\inf(1, d)$ 的拓扑都是恒同的.

2° 设 E 是被赋以距离 d_i 的距离空间 E_i 的乘积. E 上的联系距离

$$(\sum d_i^2)^{1/2}、\sup d_i、\sum d_i$$

的拓扑都是恒同的; 事实上, 我们已经知道, 这些距离相互间

[*] 也可说是"可度量化"的.

的比是有界的.

Z 不能错误地认为:"当 E 上的联系两个距离的两个拓扑恒同时,这两个距离就满足命题 16-10 中用过的典型关系". 例如,在 $\mathbb{R}_+^*$ 上,距离 $|x-y|$ 和 $|1/x-1/y|$ 对 $\mathbb{R}_+^*$ 给出通常的拓扑,但当 $|x-y|$ 趋向于零时,$|1/x-1/y|$ 并不趋向于零*).

命题 16-11 1° 一个距离空间 E 的任何距离子空间有 E 的拓扑的诱导拓扑作为拓扑.

2° 任何有限个距离空间 E_i 的乘积距离空间 E 有 E_i 的乘积拓扑作为拓扑.

证明 1° 这是直接可得的,因为对于任何 $A\subset E$, A 的开球是 E 的开球在 A 上的迹.

2° 我们已经知道,三种距离 $(\sum d_i^2)^{1/2}$, $\sup d_i$, $\sum d_i$ 在 E 上定义了同样的拓扑. 比如,利用第二种距离: 对于任何 E 的点 $a=(a_i)$,开球 $B(a, \rho)$ 是开球 $B_i(a_i, \rho)\subset E_i$ 的乘积.

因此,这些球既对于与 E 的距离相联系的拓扑,也对于 E_i 的乘积拓扑,组成 a 的邻域基.

例 在 $\mathbb{R}^n$ 中,至此所用的乘积拓扑恒同于与 Euclide 距离相联系的拓扑.

17. 一致连续性

正如在拓扑群的情形中,谈论一个集合有多么小的可能性使我们可以谈论函数的一致连续性.

定义 17-1 我们说距离空间 E 到距离空间 F 的映射 f 是一致连续的,是指对于任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使得

---

*) 当 x 固定时, $|x-y|$ 与 $|1/x-1/y|$ 必定同时趋向于零. 问题在于当 x, y 都可变动时,那末例如取 $x=2\varepsilon, y=\varepsilon, \varepsilon\to 0$, 则有

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\left|\frac{x-y}{xy}\right|=\left|\frac{1}{2\varepsilon}\right|\to\infty.$$

换句话说,这两个距离给出的拓扑是一样的,但一致结构是不一样的. ——译者注

$$(d_E(x, y)\leqslant\eta)\Rightarrow(d_F(f(x), f(y))\leqslant\varepsilon).$$

一个可能是更有启发性的定义如下：

定义 17-2 f 称为一致连续的，是指对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使得对于任何 $X\subset E$，

$$(\delta(X)\leqslant\eta)\Rightarrow(\delta(f(X))\leqslant\varepsilon),$$

其中 δ 表示 E 中和 F 中的直径.

注 1° 这一定义突出了一致连续和所有点上连续之间的差别.

f 的连续性可表达为：

$$(\forall x\in E)\ (\forall\varepsilon>0)\ (\exists\eta>0)：(d_E(x, y)\leqslant\eta)$$
$$\Rightarrow(d_F(f(x), f(y))\leqslant\varepsilon).$$

一致连续性可表达为：

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\eta>0)：(d_E(x, y)\leqslant\eta)\Rightarrow(d_F(f(x), f(y))\leqslant\varepsilon).$$

在第一种情形，η 取决于 x 和 ε 的选择；在第二种情形，η 只依赖于 ε 的选择.

这个注明显地证实了 f 一致连续时也连续．但逆命题是错误的：例如，$\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $x\to x^2$ 不是一致连续的，因为对于任何 $\eta>0$，f 在区间 $[a, a+\eta]$ 上的振幅 $\geqslant|2a\eta+\eta^2|$，而这些 $\omega(a)$ 并非是与 a 无关地有界的.

同样，$]0, 1[$ 到 $]-1, 1]$ 的映射 $f: x\to\sin 1/x$ 不是一致连续的，尽管它是有界的；事实上，在每个区间 $]0, \eta]$ 上，f 的振幅等于 2.

相反，我们将看到，当 E 紧时，逆命题是正确的.

2° 对于拓扑群到距离空间，或距离空间到拓扑群的映射，我们可以相当容易地形成一致连续的概念．这将是可以用集合上的一致结构来表述的一般的一致连续概念的新例子；而距离空间和拓扑群是有这种一致结构的两个重要例子.

连续模和 Lipschitz 映射 设 φ 为 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的递增映射，

它在点 0 连续，且满足 $\varphi(0)=0$；f 为距离空间 E 到距离空间 F 的映射.

我们说，f 有 φ 作为连续模，是指对于任何 $x, y\in E$，有

$$d(f(x), f(y))\leqslant\varphi(d(x, y)).$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$，故 f 是一致连续的.

反之，如果 f 一致连续，则对于任何 $u\geqslant 0$，可置

$$\varphi(u)=\sup(d(f(x), f(y))),$$

这里上确界对于所有满足 $d(x, y)\leqslant u$ 的 $x, y\in E$ 来取.

直接可得 φ 是 f 的连续模.

因此，一致连续的概念可以用连续模来表达.

如果 f 把 E 映射到 F，g 把 F 映射到 G，且 f 和 g 有 φ 和 γ 作为连续模，则映射 $g\circ f$ 有 $\gamma\circ\varphi$ 作为连续模.

在分析中最常用的连续模是形为 $u\to ku^{\alpha}(\alpha>0)$ 的函数 φ；$\alpha=1$ 的情形提供了 Lipschitz 映射. 更明确的陈述为：

定义 17-3 设 k 为 >0 的数. 我们说映射 f 是比为 k 的 Lipschitz 映射，是指对于任何 $x, y\in E$，有

$$d(f(x), f(y))\leqslant kd(x, y).$$

当 $k<1$，我们说 f 是压缩映射或简称压缩.

例 1° 设 f 为定义在 $\mathbb{R}$ 的区间上的可导数值函数. 如果 f 是比为 k 的 Lipschitz 映射，则关系式 $|\Delta f/\Delta x|\leqslant k$ 指出 $|f'|\leqslant k$；反之，如果 $|f'|\leqslant k$，则有限增量定理指出

$$|\Delta f|=|f(x)-f(y)|=|(x-y)f'(z)|\leqslant k|\Delta x|,$$

故 f 是比为 k 的 Lipschitz 映射.

2° 对于任何距离空间 E_i 的乘积 E，E 在空间 E_i 上的射影 f_i 是比为1的Lipschitz映射（对于E上常用的三种距离中的任意一个）.

3° 设 E 为距离空间，d 为它的距离. $E\times E$ 到 $\mathbb{R}$ 上的映射

$(x, y)\to d(x, y)$ 在对 $E\times E$ 的赋以定义为

$$d''((x, y), (x', y'))=d(x, x')+d(y, y')$$

的距离时，是比为 1 的 Lipschitz 映射.

事实上，三角形不等式给出

$$d(x', y')\leqslant d(x', x)+d(x, y)+d(y, y'),$$

而对 $d(x, y)$ 有类似的关系式，故

$$|d(x', y')-d(x, y)|\leqslant d(x, x')+d(y, y')$$
$$=d''((x, y), (x', y')).$$

对于另外两个常用距离，比 1 应该分别换为 $\sqrt{2}$ 和 2.

同样，对于任何 $a\in E$，映射 $x\to d(a, x)$ 是比为 1 的 Lipschitz 映射.

由距离的连续性得到，对于任何 $A\subset E$，有 $\delta(A)=\delta(\overline{A})$. 由此也推得下列命题：

命题 17-4 对于任何紧集 $A, B\subset E$，存在 $a\in A$，$b\in B$，使得 $d(a, b)=d(A, B)$.

证明 函数 d 在紧集 $A\times B$ 上连续，故它有界，且在集点 (a, b) 上达到其下确界. 因此，命题成立.

同样，也存在点 (a', b')，其上达到它的上确界；特别是当 $A=B$，$d(a', b')$ 等于 A 的直径.

系 17-5 如果在 E 中任何闭球是紧的，那末对于任何 $x\in E$ 和任何 E 的闭集 F，存在 $y\in F$，满足 $d(x, y)=d(x, F)$.

为此只需对两个紧集 $\{x\}$ 和 $F\cap B(x, \gamma)$ 应用 17-4，其中 γ 表示任意 $>d(x, F)$ 的数.

一致结构的同构 等价距离 我们已经先对于拓扑空间定义了同构的概念(同胚)，然后也对于距离空间定义了同构的概念(等距). 我们将看到，还存在一个中间的概念，它能表达某种保持集合有多小的特性.

定义 17-6 设 E, E' 为两个距离空间，f 为 E 到 E' 上的双射. 我们说 f 是 E, E' 的一致结构同构，是指 f 和 f^{-1} 都是一致连续的.

如果我们以 d, d' 表示 E, E' 上的距离，这个定义可直接转述为：双射 $f: x \to x'$ 是同构，是指存在两个连续模 φ 和 φ'，使得对于任何 $x, y \in E$，有

$$d(x', y') \leqslant \varphi(d(x, y)), \; d(x, y) \leqslant \varphi'(d'(x', y')),$$

或更简洁地说，$d(x, y)$ 和 $d'(x', y')$ 同时趋向于 0.

显然，两个同构的积仍是同构.

例 1° 设 f 为紧距离空间 E 到紧距离空间 E' 的同胚. 由于 f 和 f^{-1} 是连续的，E, E' 是紧的，这两个映射都是一致连续的(见 § 18). 因此 f 是 E, E' 的一致结构的同构.

2° 相反，$\mathbb{R}$ 到 $]-1, 1[$ 的映射 $x \to x/(1+|x|)$ 是一致连续的，且这是一个同胚. 但 f^{-1} 不是一致连续的，故 f 不是同构.

定义 17-7 设 d, d' 是集合 E 上的两个距离. 我们说它们是等价的，是指被赋以距离 d 的 E 到被赋以距离 d' 的 E 上的恒等映射 $x \to x$ 及其逆都是一致连续的.

这显然是同构的特殊情形；条件可简单地转述如下：在命题 16-10 的意义下，$d(x, y)$ 和 $d'(x, y)$ 同时趋向于 0.

例 距离空间的乘积上的三个常用距离是等价的.

很明显，距离空间上的连续和一致连续的概念在用一等价距离来替换原距离时不变.

18. 紧距离空间

我们将把本节的研究奠基于下列基本引理.

引理 18-1 设 E 为距离空间，K 为 E 的这样的闭子集，使此 K 的任何无限点列包含收敛子列.

对于任何覆盖 K 的 E 的开集族 $(\omega_i)_{i\in I}$，存在数 $\rho>0$，使得对于任何 $x\in K$，开球 $B(x, \rho)$ 至少包含在一个 ω_i 中.

证明 总之，这里要指出，不仅是 ω_i 覆盖 K，而且它们在陈述中所明确的意义下，ρ——一致地覆盖 K.

假设不存在这样的 ρ；于是对于任何整数 n，存在 K 的点 x_n，使得 $B(x_n, 1/n)$ 不在任何 ω_i 中；这个点列 (x_n) 有一收敛子列 (x_{n_i})；设 a 为这个子列的极限.

由于 K 是闭的，故 a 属于 K. 从而存在包含 a 的族中的开集 ω；设 $B(a, \lambda)$ 是中心为 a 包含在 ω 中的开球.

根据三角形不等式，球 $B(x_{n_i}, (\lambda-\varepsilon_{n_i}))$（其中 $\varepsilon_{n_i}=d(a, x_{n_i})$）包含在 $B(a, \lambda)$ 中，故更是在 ω 中. 由于当 $n_i\to\infty$ 时，ε_{n_i} 趋向于 0，只要 n_i 充分大，球 $B(x_{n_i}, 1/n_i)$ 就包含在 ω 中，与假设矛盾.

这一矛盾就证明了引理.

Z 不能错误地认为：对于距离空间的任何子集 K，引理中陈述的性质还是成立的. 例如，当 $E=\mathbb{R}$，$K=]0, 1[$，退化为开集]0, 1[的族 (ω_i) 就不具有所述性质. 对于 $E=K=]0, 1[$ 我们得到一个类似的例子，并且这里 K 在 E 中是闭集.

这条引理有一些重要的推论，特别是下面的定理 18-2 和 18-4.

定理 18-2 对于任何距离空间 E，下列四条性质是等价的：

1° E 是紧的；

2° E 的任何无限点列至少有一附着点；

3° E 的任何无限点列包含一个收敛子列；

4° E 的任何无限子集至少有一聚点.

证明

(1)⇒(2) 根据命题 11-5.

(2)⇒(3) 根据命题 16-5.

(3)⇒(4). 事实上,如果 A 是 E 的无限子集,则存在 A 的不同点的无限点列 (x_n); 它包含收敛子列; 如果 x 是子列的极限, x 显然为 A 的聚点.

(4)⇒(1). 事实上,假设 E 的任何无限子集至少有一聚点.

设 $(\omega_i)_{i\in I}$ 为 E 的开覆盖; 我们将由它选出 E 的有限子覆盖,从而也就证明了 E 的紧性.

根据上述引理, 存在数 $\rho>0$, 使得 E 的任何开球至少包含在族的一个 ω_i 中.

设 x_1 为 E 的点; 如果 $B(x_1, \rho)$ 不覆盖 E, 则存在点 x_2 使得 $d(x_1, x_2)\geqslant\rho$. 一般可假设已定义相互间距离 $\geqslant\rho$ 的点 $x_1, x_2, \cdots, x_p$. 如果 $B(x_n, \rho)$ $(n=1, 2, \cdots, p)$ 的并不覆盖 E, 就存在点 x_{p+1} 使得 x_{p+1} 到 $x_n(n\leqslant p)$ 的距离 $\geqslant\rho$.

x_n 的序列不可能是无限的; 否则这些 x_n 构成一个相互间距离 $\geqslant\rho$ 的无限点集, 从而排除了有聚点的可能性, 与假设矛盾.

因此, 存在整数 p, 使得球 $B(x_n, \rho)$ $(n\leqslant p)$ 的族覆盖 E; 而它们每一个又包含在一个 ω_i 中; 故这些 ω_i 提供了所求的有限覆盖.

系 设 X 是距离空间 E 的子集. X 在 E 中相对紧等价于 X 的任何无限点列包含收敛于 E 的点的无限子列.

证明 1° 事实上, 如果 $\overline{X}$ 是紧的, 则 X 的任何无限点列也是 $\overline{X}$ 的无限点列, 从而它包含在 $\overline{X}$ 中收敛的子列.

2° 反之, 如果所述成立, 我们证明 $\overline{X}$ 是紧的. 设 (x_n) 是 $\overline{X}$ 的点列; 对于任何 n, 存在 $x'_n\in X$ 使得 $d(x_n, x'_n)<1/n$; 点列 (x'_n) 包含收敛于 E 的点 a 的子列 (x'_{n_i}); 则点列 (x_{n_i}) 显然也收敛于 a, 故它是 $\overline{X}$ 的附着值, 从而在 $\overline{X}$ 中.

因此根据定理 18-2, $\overline{X}$ 是紧的.

我们不难用序列的聚点或附着点来陈述一系列等价的准则.

命题 18-3 任何紧距离空间 E 有开球组成的可数基.

证明 事实上，对于任何整数 n，开球 $B(x, 1/n)$ 覆盖 E，故存在这些球的有限族 $\mathscr{F}_n$ 也覆盖 E；这些有限族的并就是所求的可数基. 事实上，对于 E 的任何开集 ω 和任何 $x\in\omega$，存在包含 x 且直径任意小的这个族的元素 B；在所有这种元素 B 中之一 B_x 可包含在 ω 中，而 ω 显然是这些 B_x 的并.

系 任何紧距离空间包含处处稠可数子集.

事实上，如果 (B_i) 是我们刚才构造的可数球族，x_i 表示 B_i 的任意点，则 x_i 的集合就回答了这一问题.

定理 18-4 任何紧距离空间 E 到另一距离空间 F 的连续映射 f 是一致连续的.

由于这条定理的重要性，我们将给出两个证明.

第一个证明 设 $\varepsilon>0$. 由于 f 连续，我们可以对任何 $x\in E$，联系开邻域 ω_x，使得 f 在 ω_x 上的振幅 $\leqslant\varepsilon$.

设 ρ 为根据引理 18-1 得到的联系 ω_x 族的数. 任何 E 的球 $B(y, \rho)$ 至少包含在一个 ω_x 中；于是在这个球上，f 的振幅 $\leqslant\varepsilon$；这就证明了 f 的一致连续性.

第二个证明 如果 f 不一致连续，则存在数 $\varepsilon>0$，使得对于任何整数 $n>0$，存在两个点 x_n, $y_n\in E$，使得

$$d(x_n, y_n)\leqslant 1/n,\ d(f(x_n), f(y_n))\geqslant\varepsilon.$$

由序列 (x_n) 可以选出子列 (x_{n_i}) 收敛于 E 的点 a；由于 $\lim d(x_n, y_n)=0$，故序列 (x_{n_i})；也收敛于 a. 因此 a 的任何邻域包含点对 (x_n, y_n)；但 f 在任何 V 上的振幅至少等于 ε，故 f 在 a 上不连续. 这就与假设矛盾.

我们可以推广定理 18-4，得到略为一般而非常方便的命题如下：

定理 18-5 设 E 为距离空间，K 为包含在 E 中的紧集. f 为 E 到距离空间 F 的映射. 如果 f 在 K 的任何点上连续，那末 f

在 K 的周围按下列意义一致连续：对于任何 $\varepsilon>0$，存在数 $\rho>0$，使得对于任何 $x\in K$，f 在球 $B(x, \rho)$ 上的振幅 $\leqslant\varepsilon$.

证明可采用证明 18-4 的一种方式来进行，例如对于如下定义的开集 ω_x 的族应用引理 18-1：对于任何 $x\in K$，ω_x 是其上 f 的振幅 $\leqslant\varepsilon$ 的 E 中的 x 的开邻域.

注意，在这一命题中，我们完全没有假设 f 在 K 以外的连续性.

19. 连通距离空间

对于距离空间，我们将看到可以把连通性的直观概念更为精确.

定义 19-1 距离空间 E 称为**链锁的**，是指对于任何 E 的点对 (a, b) 和任何 $\varepsilon>0$，存在 E 的有限点列：$a_1, \cdots, a_n$，满足 $a_1=a$，$a_n=b$，且对于任何 $i<n$，有 $d(a_i, a_{i+1})\leqslant\varepsilon$；换句话说，我们可以用一条步长至多为 ε 的链将 a 和 b 连接起来.

命题 19-2 任何连通距离空间 E 是链锁的.

证明 设 $a\in E$，$E(a, \varepsilon)$ 为 E 的可以用一条步长不超过 ε 的链与 a 相连的 x 的全体. 这个集合非空，因为它包含 a；它是开集，因为如果 $x\in E(a, \varepsilon)$，则所有满足 $d(x, y)<\varepsilon$ 的 y 也是 $E(a, \varepsilon)$ 的元素；它是闭集，因为如果 x 是 $E(a, \varepsilon)$ 的聚点，则存在 $E(a, \varepsilon)$ 的点 y，满足 $d(x, y)<\varepsilon$.

由于 E 是连通的，故有 $E(a, \varepsilon)=E$，换句话说，我们可以把 E 的任何点 b 用一条步长不超过 ε 的链与 a 相连. 因此 E 是链锁的.

Z 不能错误地认为：反之，任何链锁距离空间是连通的. 例如，有理数集 $\mathbb{Q}$ 是链锁的，但并不连通. 相反，逆命题当 E 紧时是正确的.

命题 19-3 紧距离空间连通等价于它是链锁的.

证明 余下的是证明这一等价性的一部分. 于是设 E 是紧距离空间. 如果它不连通, 则存在把 E 分为两个非空闭集 E_1, E_2 的分划. 由于 E_1 和 E_2 是紧的, 它们的距离 δ 不是零. 我们不能把 E_1 的点和 E_2 的点用步长不超过 $\delta/2$ 的链连结, 否则设 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为这样的链, i 为使 $a_i \in E_2$ 的最小指标; 那末 $a_{i-1} \in E_1$, 且 $d(a_{i-1}, a_i) < \delta/2$, 与等式

$$d(E_1, E_2) = \delta$$

矛盾. 换句话说, 如果 E 是链锁的, 它也是连通的.

系 19-4 $\mathbb{R}$ 的任何紧区间是连通的.

事实上, 任何区间 $[a, b]$ 是紧的, 且它显然是链锁的(利用点 $a+n\varepsilon$).

更一般地, 设 E 为 $\mathbb{R}$ 的任意区间, $x_0 \in E$; 对于任何 $x \in E$, 有 $[x_0, x] \subset E$, 故 E 是紧区间 $[x_0, x]$ 的并; 因而它是连通的.

反之, 我们在研究连通拓扑空间时已经看到, $\mathbb{R}$ 的不是区间的子集不是连通的. 总之:

命题 19-5 $\mathbb{R}$ 的仅有的连通集是区间(开、半开或闭).

系. 对于连通拓扑空间 E 上的任何连续数值函数 f, 集合 $f(E)$ 是 $\mathbb{R}$ 的区间.

因此当 f 在 E 上又取正值、又取负值时, 它一定在 E 的一个点上取零.

应用 19-6 设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 的区间 E 上的严格递增的连续数值函数.

由于 f 是 E 和 $f(E)$ 的序同构, 它也是对于与这些序相联系的拓扑的同胚. 既然 f 连续, 故 $f(E)$ 是区间; 因此在 $f(E)$ 上序拓扑恒同于 $\mathbb{R}$ 的拓扑的诱导拓扑; 对于 E 也一样. 这样, f 是区间 E 和 $f(E)$ 的同胚; 从而反函数 f^{-1} 也是连续和严格递增的.

当 f 严格递减时，我们显然有一个类似的结果.

20. Cauchy 列和完备空间

在研究 $\mathbb{R}$ 时，我们已经定义了 Cauchy 列的概念，且指出任何 $\mathbb{R}$ 的 Cauchy 列是收敛的.

Cauchy 列的概念不是拓扑概念，例如，序列 $(1/n)$ 是 $]0, \to[$ 的 Cauchy 列，但 $]0, \to[$ 到自身上的同胚 $x \to x^{-1}$ 把它变为不是 Cauchy 列的序列 (n).

因此我们不能期望定义拓扑空间上的 Cauchy 列的概念.

相反，我们将看到，在距离空间中这是不难做到的.

定义 20-1 设 E 为距离空间，(x_n) 为 E 的无限点列. 我们说这个序列是 Cauchy 列，是指当 p, q 趋向于 $+\infty$ 时，$d(x_p, x_q)$ 趋向于 0，换句话说，是指对于任何 $\varepsilon>0$，存在整数 n，使得对于任何 $p, q \geqslant n$，有 $d(x_p, x_q) \leqslant \varepsilon$.

简记如下：

$$(\forall \varepsilon>0)\ (\exists n,\ n \in \mathbb{N})\ (\forall p,\ q \geqslant n):(d(x_p,\ x_q) \leqslant \varepsilon).$$

利用满足 $p \geqslant n$ 的点 x_p 的集合 A_n，我们可得到一个可能更有启发性的等价定义：

定义 20-2 (x_n) 是 Cauchy 列，是指 $\lim \delta(A_n)=0$（其中 $\delta(A_n)$ 表示 A_n 的直径）.

Cauchy 列的任何无限子列也是 Cauchy 列. 如果 Cauchy 列的子列收敛于点 x，则该 Cauchy 列也收敛于 x.

例 1° 对于任何距离空间 E，任何收敛于 E 的点的序列 (x_n) 是 Cauchy 列.

2° 在 $\mathbb{R}$ 的距离子空间 $E=]0, \to[$ 中，序列 $(1/n)$ 是不收敛的 Cauchy 列.

3° 更一般地，设 E 是距离空间 F 的距离子空间；对于任何

$x\in\bar{E}$，存在 E 的收敛于 x 的点列 (x_n)；这个序列是 E 中的 Cauchy 列；它仅当 $x\in E$ 时在 E 中收敛。

4° 设 E 为 $[0, 1]$ 上的连续数值函数的集合．对于任何 f，$g\in E$，置

$$d(f, g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx.$$

可以验证，d 恰好是 E 上的距离．如果置

$$f_n(x)=\inf(n, x^{-\frac{1}{2}}),$$

可以验证，f_n 是 E 上的 Cauchy 列．

命题 20-3 设 E，F 为两个距离空间，f 为 E 到 F 的一致连续映射；则任何 E 的 Cauchy 列 (x_n) 通过 f 的象是 F 的 Cauchy 列．

事实上，如果 A_n 和 B_n 分别表示满足 $p\geqslant n$ 的 x_p 和 $f(x_p)$ 的集合，则有 $f(A_n)=B_n$；既然 $\lim\delta(A_n)=0$，于是由于 f 一致连续，我们有 $\lim\delta(B_n)=0$，即 $(f(x_n))$ 是 Cauchy 列．

Z 如果 f 仅仅连续，它还是把任何收敛的 Cauchy 列变为收敛列，从而也是 Cauchy 列；但是上面的例 2 给我们指出，它可能把某些不收敛的Cauchy 列变为非 Cauchy 列．

系 如果 f 是 E 和 F 的一致结构的同构，那末 f 交换 E 和 F 的 Cauchy 列．

特别是，如果 d 和 d' 是集合 E 上的两个等价的距离，那末对于联系 d 和 d' 的距离来说，Cauchy 列是一样的．E 的 Cauchy 列的概念因而并不联系 E 的距离结构，而是联系它的一致结构．

命题 20-4 设 E 为距离空间 E_i 的有限乘积，(x_n) 为 E 的点列，$(x_{n,i})$ 为其在 E_i 上的射影．

$((x_n)$ 是 E 的 Cauchy 列$)\Leftrightarrow(\forall i,\ (x_{n,i})$ 是 E_i 中的 Cauchy 列$)$．

证明 设 d_i 为 E_i 上的距离；由于 E 上常用的三种距离是等价的，上面的系指出，我们可以在 E 上取这些距离中的任意一个；我们取

$$d''(x, y)=\sum d_i(x_i, y_i).$$

E 到 E_i 上的射影 $x\to x_i$ 是比为 1 的 Lipschitz 映射，因而一致连续；于是如果 (x_n) 是 Cauchy 列，$(x_{n,i})$ 也是.

反之，如果每个 $(x_{n,i})$ 是 Cauchy 列，关系式

$$d''(x_p, x_q)=\sum d_i(x_{p,i}, x_{q,i})$$

指出 (x_n) 是 Cauchy 列.

完备空间 在 $\mathbb{R}$ 中，任何 Cauchy 列收敛；相反，上面不少例子指出，存在一些距离空间，其上某些 Cauchy 列不收敛. 因此这就引导我们去研究那些其上所有 Cauchy 列都收敛的空间.

定义 20-5 我们说距离空间 E 是完备空间，是指 E 的任何 Cauchy 点列在 E 上收敛.

例 被赋以通常距离的 $\mathbb{R}$ 是完备的. 相反，$]0, 1[$ 和 $\mathbb{Q}$ 是不完备的.

在 22-8 中我们将看到任何距离空间可以通过附加新的点而变得完备.

命题 20-6 设 E 是完备距离空间. 对于 E 的任何满足 $\lim\delta(X_n)=0$ 的非空闭集递减列 (X_n)，X_n 的交 X 恰好包含一个点.

证明 在每个 X_n 中选取一个任意点 x_n. 如果 $p\geqslant n$，我们有 $X_p\subset X_n$，因而也有 $x_p\in X_n$.

于是满足 $p\geqslant n$ 的 x_p 的集合 A_n 包含在 X_n 中；由此得到 $\lim\delta(A_n)=0$；从而序列 (x_n) 是 Cauchy 列. 由于 E 完备，x_n 收敛于点 x.

既然对于任何固定的 n，x 是属于 X_n 的点 x_{n+p} 的极限，而 X_n 是闭的，故有 $x\in X_n$ 对于任何 n 成立，从而 $x\in X$.

最后，由于 $\delta(X)\leqslant\delta(X_n)$ 对于任何 n 成立，我们有 $\delta(X)=0$，因此 X 只可能包含一个点。

Z 我们可能以为如果 $\lim\delta(X_n)>0$，那末 X_n 的交不仅非空，并且还能包含一个点以上。其实完全不是这样，下面的例子说明这个问题。

在完备空间 $\mathbb{R}$ 中，区间 $[n, \rightarrow[$ 构成无限直径的闭集的递减列，然而它们的交是空的。

换句话说，空间是完备的事实仅对于小集合才显示出来。我们将通过一条补充命题 20-6 的陈述来进一步证实这一现象。

定义 20-7 设 E 为距离空间，$\mathscr{B}$ 为 E 上的滤子基。我们说 $\mathscr{B}$ 为 Cauchy 滤子基，是指对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $X\in\mathscr{B}$，使得 $\delta(X)<\varepsilon$。

例 1 对于 E 的任何非空子集的递减列 (A_n)，当 $\lim\delta(A_n)=0$ 时，A_n 组成 Cauchy 滤子基。

例 2 设 $\mathscr{F}$ 是滤子序集，即对于任何 $a, b\in\mathscr{F}$；存在 $c\in\mathscr{F}$，满足 $a, b\leqslant c$。

我们将说，$\mathscr{F}$ 到距离空间 E 的映射 f 满足 Cauchy 条件，是指由形为 $\{f(x): a\leqslant x\}$ 的集合组成的 E 上的滤子基是 Cauchy 滤子基。

命题 20-8 完备距离空间 E 上的任何 Cauchy 滤子基是收敛的。

证明 设 $\mathscr{B}$ 是 E 上的 Cauchy 滤子基。对于任何整数 n，存在 $X_n\in\mathscr{B}$，使得 $\delta(X_n)<1/n$。设 x_n 为 X_n 的任意点。

对于任何 p, q，有

$$X_p\cap X_q\neq\varnothing, \text{从而 } \delta(X_p\cup X_q)<1/p+1/q;$$

这样也有
$$d(x_p, x_q)<1/p+1/q.$$

序列 (x_n) 因而是 Cauchy 列；设 x 为它的极限。对于任何

$\varepsilon>0$，存在 n，满足

$$d(x,\ x_n)<\varepsilon/2,\ \delta(X_n)<\varepsilon/2.$$

由于 $x_n\in X_n$，故有 $X_n\subset B(x,\ \varepsilon)$.

这就是说，$\mathscr{B}$ 收敛于 x.

例 设 f 为局部紧但非紧的空间 E 上的数值函数. 我们假设，对于任何 $\varepsilon>0$，存在紧集 $K\subset E$，使得 f 在 $\complement K$ 上的振幅 $<\varepsilon$.

$f(\complement K)$ 于是组成 $\mathbb{R}$ 上的 Cauchy 滤子基；如果这个滤子基收敛于数 l，我们称它为当 x 趋向于无限时 $f(x)$ 的极限.

下列定理提供了一类重要的完备空间：

定理 20-9 任何紧距离空间是完备的.

证明 利用已经用过的记号，对于 E 的任何点列 (x_n)，这个点列的附着集为

$$A=\bigcap \overline{A}_n.$$

如果序列是 Cauchy 列，则 $\lim\delta(A_n)=0$，于是 $\delta(A)=0$. 此外，根据命题 11-5，A 非空；因此它退化为一点；再根据同样的命题，序列收敛于这个点.

注 除了紧距离空间外，还有其他的完备空间；其中实直线 $\mathbb{R}$ 就是经典的例子. 由于这一空间是局部紧的会使人以为任何局部紧空间都是完备的，或者任何完备空间都是局部紧的；但这两个命题都是不正确的：例如 $\mathbb{R}$ 的距离子空间 $]0,\ 1[$ 是局部紧的，但不完备；此外我们将在 22 节定义的空间 $\mathscr{C}([0,\ 1],\ \mathbb{R})$ 是完备空间，但不是局部紧的.

系 设 E 为距离空间，$a\in E$. 如果任何中心为 a 的 E 的闭球是紧的，那末 E 是完备的.

事实上任何 Cauchy 列是有界的，故可包含在中心为 a 的某个闭球中；定理 20-9 指出，这一序列在球中收敛，故也在 E 中收敛[*].

[*] 原书此后有一Z，但内容与前面的注重复，故略去. ——译者注

完备空间与紧空间之间的类似. 在上述证明中，我们可以证实在完备空间和紧空间之间有某种类似. 我们将通过一系列类似于前面对于紧空间建立的定理，来把它进一步明确. 相反，我们也将指出若干重要的差别.

定理 20–10 对于任何完备距离空间 E, E 的任何闭子集 A 是完备距离子空间.

事实上，设 (x_n) 为 A 的点的 Cauchy 列. 这个点列也是 E 的点的 Cauchy 列，故它收敛于 E 的点 x; 但是序列的点属于 A, 而 A 是闭的，故也有 $x\in A$. 因此序列收敛于 A 的点.

定理 20–11 对于任何距离空间 E, E 的完备距离子空间 A 是闭的.

事实上可指出 A 包含它的聚点. 设 x 为这种点. 该点是 A 的序列 (x_n) 的极限. 这一序列是收敛的，故也是 Cauchy 列; 由假设它收敛于 A 的点. 因此就有 $x\in A$.

系 对于任何完备距离空间 E, E 的闭子集与 E 的完备子空间是恒同的.

定理 20–12 在任何距离空间 E 中，两个完备子空间的并是完备的; 任何完备子空间的交是完备的.

1° 设 A 和 B 是 E 的两个完备子空间; (x_n) 为 $(A\cup B)$ 的 Cauchy 列; 这个序列的任何无限子列也是 Cauchy 列. 既然这个序列在集合 A 或 B 上的迹是无限子列，而集合 A 和 B 是完备的，故该子列收敛于 A 或 B 的一个点; 序列 (x_n) 因而也收敛于同一点.

2° 如果 $(A_i)_{i\in I}$ 都是完备的，则它们中的每一个都在 E 中闭，因此它们的交在 E 中闭，尤其是在这些完备子空间中的任意一个 A_{i_0} 中闭. 从而根据定理 20–10, 这一交是完备空间.

Z 设 E, F 为两个距离空间, f 为 E 到 F 上的一致连续的满射. 不能错误地认为: 当 E 完备时, F 也必定完备; 甚

至在 f 是一致连续的同胚时也不行.

例如, $\mathbb{R}$ 到 $]-1, 1[$ 上的映射 $x \to x/(1+|x|)$ 具有这些性质, 但 $]-1, 1[$ 并不完备, 尽管 $\mathbb{R}$ 是完备的.

相反, 如果 f 是 E, F 的一致结构的同构, 则这两个空间就同时为完备或同时为不完备; 特别是, 当 d 和 d' 是同一个集合 E 上的两个等价距离时, 与它们相联系的距离空间就同时为完备或同时为不完备.

更一般地, 设 f 是 E 到 F 上的同胚; 如果 f 一致连续, 且 F 完备, 那末 E 也完备.

定理 20-13 任何完备距离空间的有限乘积是完备的.

证明 设 E_i 是完备距离空间的有限族. 对于 $E=\Pi E_i$ 的任何 Cauchy 列 (x_n), 其在 E_i 上的射影是 Cauchy 列(命题 20-4); 设 a_i 为它的极限. 则序列 (x_n) 在 E 上收敛于 $a=(a_i)$(命题 10-3); 因此 E 完备.

例 由于 $\mathbb{R}$ 完备, 故 $\mathbb{R}^n$ 也完备. $\mathbb{R}^n$ 的任何闭集也是完备的.

一致连续函数的延拓 如果 f 表示距离空间 E 到另一个距离空间 F 的连续映射, 则 f 在任何 $X \subset E$ 上的限制也是连续的; 反之, 如果我们给出 X 到 F 的连续映射 f, 那末可提出一个问题: 我们是否可把 f 延拓到 E 上? 即 f 是否某个 E 到 F 的连续映射在 X 上的限制?

我们只在这里考察这个问题的一种非常有用的特殊情形.

定理 20-14 设 X 为距离空间 E 的处处稠子集, f 为 X 到完备距离空间 F 的一致连续映射. 那末存在 E 到 F 的唯一的连续映射 g, 使得它在 X 上的限制是 f; 这个映射 g 也是一致连续的.

证明 如果 g 是这样的延拓, 则对于任何 $a \in E$, 有:

$$g(a)=\lim_{\substack{x\in X\\ x\to a}} f(x).$$

这一关系式一方面指出，如果 g 存在，则它是唯一的，另一方面对于任何 $a\in E$ 提供了 $g(a)$ 可能有的值.

由于 f 一致连续，$f(B(a,\rho))$ 的直径随 ρ 趋向于 0；因此，对于任何 $a\in E$，集合 $f(B(a,\rho))$ 组成 F 的 Cauchy 滤子基，而由于 F 完备，这个滤子基收敛（命题 20-8）于 F 的一个点，记它为 $g(a)$.

如果 $a\in X$，则有 $f(a)\in f(B(a,\rho))$，故 $f(a)=g(a)$；因此，只要我们指出 g 一致连续，g 就将是所求的 f 的延拓.

由假设，对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $\eta=\varphi(\varepsilon)>0$，使得对于任何 x，$y\in X$ 满足 $d(x,y)<\eta$，就有 $d(f(x),f(y))\leqslant\varepsilon$.

于是设 a，$b\in E$ 满足 $d(a,b)<\eta$，则存在两个 X 的点列 (a_n)，(b_n) 分别收敛于 a，b，且对于任何 n，满足 $d(a_n,b_n)<\eta$.

关系式：

$$g(a)=\lim f(a_n);\ g(b)=\lim f(b_n);\ d(f(a_n),f(b_n))\leqslant\varepsilon$$

导致 $d(g(a),g(b))\leqslant\varepsilon$，因为距离 d 是连续函数. 从而 g 一致连续.

证明甚至还指出，如果 f 的连续模 φ 连续，则它同样也是对于它的延拓 g 的连续模；特别是当 f 是比为 k 的 Lipschitz 映射时，g 也同样是这样的映射.

21. 逐次逼近法的模式

为了证明一个方程的解的存在，不管它是数值方程、微分方程、偏微分方程还是积分方程，以及有时还为了有效地计算这个解，最强有力的方法是所谓逐次逼近法；它首先是由 Emile Picard 系统应用的. 在许多情形，它可带来一种我们用下列不动点定理来具体化的模式：

定义 21-1 设 f 为集合 E 到自身的映射. 所谓 f 的不动点

是指所有满足 $f(x)=x$ 的 $x\in E$.

不动点定理 21-2 设 E 为完备距离空间,f 是 E 到自身的压缩. 那末 f 有不动点,且是唯一的.

更确切地说,对于任何 $x_0\in E$,点 x_0 的迭代序列 $x_n=f^n(x_0)$ 收敛于点 a, 而 a 是方程 $x=f(x)$ 的解. 这个解 a 是该方程的唯一解.

证明 我们假设 f(是其比 $k<1$ 的 Lipschitz 映射,且置 $x_1=f(x_0)$ 以及更一般地置 $x_{n+1}=f(x_n)$. 对于任何 n,点对 (x_{n-1}, x_n) 变为点对 (x_n, x_{n+1}).

因此有 $$d(x_n, x_{n+1})\leqslant kd(x_{n-1}, x_n).$$

由这种形式的前 n 个关系式可得

$$d(x_n, x_{n+1})\leqslant k^n d(x_0, x_1),$$

故 $$d(x_n, x_{n+p})\leqslant \sum_{n}^{n+p-1} d(x_i, x_{i+1})\leqslant d(x_0, x_1)\sum_{n}^{\infty}k^p$$

$$=d(x_0, x_1)k^n/(1-k).$$

因为 $0\leqslant k<1$,故 x_n 的序列是 Cauchy 列. 设 a 为其极限;由于 f 连续,$\lim f(x_n)=f(a)$.

关系式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 因而给出极限式: $a=f(a)$.

这个解 a 是方程 $x=f(x)$ 的唯一解, 因为对于该方程的任何解,有:

$$d(x, a)=d(f(x), f(a))\leqslant kd(x, a),$$

这就导致 $$d(x, a)=0 \quad 以至 \quad x=a.$$

注意,所利用的方法构成一种可有效使用的计算程序,因为通项为 $d(x_p, x_{p+1})$ 的级数比公比为 k 的几何级数收敛得要快. 更确切地说,我们有

$$d(x_n, a)=\lim_{p\to\infty} d(x_n, x_{n+p})\leqslant d(x_0, x_1)k^n/(1-k).$$

有时可能收敛得还要更快, 例如当 f 在 a 的邻域上的限制是

$k(V)$ 阶的压缩，而 $k(V)$ 随着 V 的直径趋向于 0.

1° 任何 E 到自身的压缩映射 f 满足以下所说：对于任何 $x, y\in E(x\neq y)$，有 $d(f(x), f(y))<d(x, y)$；但反之不然．甚至可能当 f 在这一意义下严格缩小距离，且 E 完备时，f 仍没有不动点．$\mathbb{R}_+$ 到自身的映射 $x\to(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ 就是一个例子．

2° 当 E 不完备时，E 到 E 的压缩映射可能没有不动点：例如 $]0, 1]$ 到自身的映射 $x\to x/2$ 没有不动点．

注 21-3 设 f 为完备的 E 到自身的比为 k 的压缩映射；a 为 f 的不动点．

对于任何数 $\rho>0$，

$$f^n(B(a, \rho))\subset B(a, k^n\rho).$$

特别是如果 E 有界，递减列 $\delta(f^n(E))$ 有极限为 0；序列 $f^n(x)$ 因而一致趋向于 a.

21-4 可能有这样的情形，f 不是压缩，但 f 的适当的幂 f^p 是压缩；于是置 $f^p=g$.

对 g 我们可以应用定理 21-1．如果 a 是 g 的不动点，则关系式 $g(a)=a$ 给出

$$f(g(a))=f(a);$$

既然 $f^{p+1}=f(g)=g(f)$，我们也有

$$g(f(a))=f(a).$$

因此 $f(a)$ 是 g 的不动点；这种点的唯一性指出 $f(a)=a$；换句话说，a 也是 f 的不动点．

对于任何 $x_0\in E$，$g^n(x_0)$ 或 $f^{np}(x_0)$ 收敛于 a；由于 f 连续，$f^{np+1}(x_0)$ 也收敛于 a，以及更一般地 $f^{np+i}(x_0)$（其中 $i\leqslant p$）也收敛于 a；因此 $f^n(x_0)$ 的序列也收敛于 a.

例 1° E 是 Euclide 空间 $\mathbb{R}^n$，f 是比 $k<1$ 的相似（距离乘

上常数因子的变换). f 的不动点 a 称为相似中心.

2° 设 f 是定义在有界闭区间 $E=[a, b]$ 上的可导数值函数,它的值集也包含在$[a, b]$中,且$|f'|\leqslant k$,其中 $k<1$.

于是$[a, b]$到自身的映射 f 是比为 k 的压缩,从而定理可应用.

这是求解数值方程的熟知方法.

例如,设 f 为$[1, \rightarrow[$到自身的映射 $x\rightarrow(x/2+1/x)$;它是比为 1/2 的压缩,且其不动点为 $\sqrt{2}$. 由于$f'(\sqrt{2})=0$,该程序的收敛特别快.

我们将看到这个定理对隐函数理论和解微分方程上的其他应用;然而,对于这些应用,引入一个参数来使定理 21-2 精确化,那将更为方便.

定理 21-5 设 L 是拓扑空间,E 为完备距离空间,f 为 $L\times E$ 到 E 的连续映射,满足以下所述:对于任何 $\lambda\in L$, E 到 E 的映射 $x\rightarrow f(\lambda, x)$是比为 k 的压缩(其中 $k<1$,不依赖于 λ).

如果对于任何 λ,我们用 a_λ 来表示满足 $x=f(\lambda, x)$的 E 的点 x,则 L 到 E 的映射 $\lambda\rightarrow a_\lambda$ 是连续的.

证明 设 $\lambda_0\in L$;我们证明映射 $\lambda\rightarrow a_\lambda$ 在点 λ_0 连续.

设 $\varepsilon>0$;由于 f 连续,存在 λ_0 的邻域 V,使得对于任何 $\lambda\in V$,有

$$d(f(\lambda, a_{\lambda_0}), f(\lambda_0, a_{\lambda_0}))\leqslant\varepsilon.$$

而三角形不等式给出

$$d(a_\lambda, a_{\lambda_0})=d(f(\lambda, a_\lambda), f(\lambda_0, a_{\lambda_0}))\leqslant d(f(\lambda, a_\lambda), f(\lambda, a_{\lambda_0}))$$
$$+d(f(\lambda, a_{\lambda_0}), f(\lambda_0, a_{\lambda_0}))\leqslant kd(a_\lambda, a_{\lambda_0})+\varepsilon.$$

故 $\quad d(a_\lambda, a_{\lambda_0})\leqslant\varepsilon/(1-k)\quad$ 对于任何 $\lambda\in V$ 成立.

注 其实我们只利用 f 关于 λ 的偏连续性. 但是这一注并不能减弱假设条件,因为任何 $L\times E$ 到 E 的映射 f,如果它关于 λ 偏

连续，而关于 x 它又是比为 k 的 Lipschitz 映射，那末它在 $L\times E$ 上连续；这直接可由下列不等式得到：

$$\begin{aligned} &d(f(\lambda, x), f(\lambda_0, x_0)) \\ &\quad \leqslant d(f(\lambda, x), f(\lambda, x_0)) + d(f(\lambda, x_0), f(\lambda_0, x_0)) \\ &\quad \leqslant kd(x, x_0) + d(f(\lambda, x_0), f(\lambda_0, x_0)). \end{aligned}$$

最后一个表达式显然当 $x\to x_0$, $\lambda\to\lambda_0$ 时趋向于 0.

22. 简单收敛和一致收敛

分析中最有用的拓扑空间是函数空间，即元素为函数的空间. 在这种空间中，我们可以通过空间的拓扑，在一种确定的意义下，谈论一些函数趋向于另一个函数的收敛性. 反之，当我们希望研究给定的函数集合的某些给定特征时，对这一集合赋以对研究这种特征适用的拓扑，往往会有很多方便.

下面是这类情况的几个例子：

设 E 为[0, 1]上有所有各阶导数的数值函数集合. 这是一个向量空间；如果我们想研究与这一向量结构有关的性质时，我们可使 E 的拓扑在一定的意义下与向量空间的结构相容. 特别是，如果我们寻求一种用距离定义的拓扑，它应该使对于 E 的平移不变；因此只需定义 E 的元素 0 和任意元素 f 之间的距离；我们用 $p(f)$ 来记这一距离.

1° 如果我们现在希望表达，函数 $x\to f(x)$ 在 0 的附近，是指它对所有 x 都很小，那末置

$$p(f) = \sup_{x\in E} |f(x)|.$$

2° 如果相反我们只想表示，f“平均”很小，那末置

$$p(f) = \int_0^1 |f(x)|\,dx,$$

或者为了再避免 $f(x)$ 的大值，置

$$p(f)=\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3° 与此相对照，我们还可表达 f 不仅处处很小，并且振荡也不太过分.

根据需要，可置

$$p(f)=|f(0)|+f\text{ 在}[0,\ 1]\text{上的全变差}^{*)}$$

或
$$p(f)=|f(0)|+\sup|f'(x)|.$$

4° 如果我们想表达所有直到 n 的各阶导数都很小，那末置

$$p(f)=|f(0)|+|f'(0)|+\cdots+|f^{(n-1)}(0)|+\sup_x|f^{(n)}(x)|.$$

在研究赋范空间时，我们再来仔细回顾这些处理. 目前我们将只简要地研究两种最有用的收敛方式.

简单收敛 设 X 为集合，其上的拓扑可有可无，Y 是拓扑空间. 设 f 是 X 到 Y 的映射，(f_n) 为 X 到 Y 的映射列.

定义 22-1 我们说序列 (f_n) 简单收敛于 f，是指对于任何 $x\in X$，序列 $(f_n(x))$ 收敛于 $f(x)$.

例 1° 设 f_n 为 $[0,\ 1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $x\to x^n$. 这个序列简单收敛于如下定义的函数 f:

$$f(x)=0,\ \text{当 } x\neq 1;\ f(1)=1.$$

2° 设 f_n 为 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $x\to nx/(1+|nx|)$.

这个序列简单收敛于如下定义的函数 f:

$$f(x)=-1,\text{当 } x<0;\ f(x)=1\ \text{当 } x>0;\ f(0)=0.$$

3° 设 f_n 为 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $x\to 1/[1+(x-n)^2]$. 这个序列简单收敛于 $f=0$.

更一般地，谈论函数族的简单收敛，也是方便的.

定义 22-2 设 $(f_i)_{i\in I}$ 为 X 到 Y 的映射族，$\mathscr{B}$ 是 I 上的滤子基. 我们说该族沿 $\mathscr{B}$ 简单收敛于 f，是指对于任何 $x\in X$，$f_i(x)$ 沿

---

*) 全变差的定义参看 § 24. ——译者注

$\mathscr{B}$ 收敛于 $f(x)$.

例 1° 我们可以把上述例子中把整数 n 换为任意数，而取 $\mathbb{R}$ 上的由区间 $[\alpha, \rightarrow[$ 组成的滤子基作为 $\mathscr{B}$.

2° 设 f 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的可导数值函数. 用

$$g_\alpha(x) = (f(x+\alpha) - f(x))/\alpha$$

定义的函数族 (g_α)（其中 $\alpha\in\mathbb{R}^*$）当 α 趋向于 0 时（换句话说，沿由 0 在 $\mathbb{R}$ 中的邻域在 $\mathbb{R}^*$ 中的迹所组成的滤子基 $\mathscr{B}$），简单收敛于导函数 f'.

3° 设 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $f_{p,q}$ 定义为

$$f_{p,q}(x, y) = e^{-px^2-qy^2}, \text{其中 } p, q\in\mathbb{N}.$$

当 p 和 $q\to\infty$ 时，双重序列 $f_{p,q}$ 简单收敛于函数 f，它满足在原点 $f=1$，而其他处处为 0.

Z 我们没有利用 X 到 Y 的映射集合上的拓扑，就已经定义了简单收敛性；其实在这个集合上就隐蔽着一个称为简单收敛拓扑的拓扑（见习题 107），但我们没有机会明确地利用它.

这里注意到这个拓扑一般不能用距离来定义是有益的. 设 (f_n) 是 $[0, 1]$ 上的数值函数列，它简单收敛于 f；当每个 f_n 本身是序列 $(f_{n,p})$ 的简单极限时，可以想象 f 是在 $f_{n,p}$ 中适当选取的函数的序列的简单极限. 直接可得，当简单收敛拓扑可距时，这是成立的（见习题 67）；但一些简单的例子指出，这并不成立；因此这一拓扑不可距（也参看习题 107）.

一致收敛 再设 X 为拓扑可有可无的任意集合，Y 现在假设为距离空间；我们再以 f 和 f_n 表示 X 到 Y 的映射.

定义 22-3 我们说序列 (f_n) 一致收敛于 f（或者说 f 是 f_n 的一致极限），是指对于任何 $\varepsilon>0$，存在整数 n_0，使得对于任何 $n\geqslant n_0$ 和任何 $x\in X$，有 $d(f_n(x), f(x))\leqslant\varepsilon$.

用同样方式可定义族(f_i)沿滤子基$\mathscr{B}$一致收敛于f；然而当我们定义了一致收敛拓扑以后，这一定义就将变为无用.

Z 任何一致收敛于f的序列f_n也简单收敛于f，但在本质上要指出，反之是不成立的. 下面是若干例子：

1° 设f_n是由下列条件定义的$X=[0, 1]$上的连续数值函数：

$$在[0, 1/n]上, f_n(x)=n^2x(1-nx).$$

$$在[1/n, 1]上, f_n(x)=0.$$

我们不难验证序列f_n简单收敛于函数$f=0$，但这种收敛性不是一致的，因为

$$\sup|f_n(x)-f(x)|=n/4,$$

它不但不趋向于0，而趋向于$+\infty$.

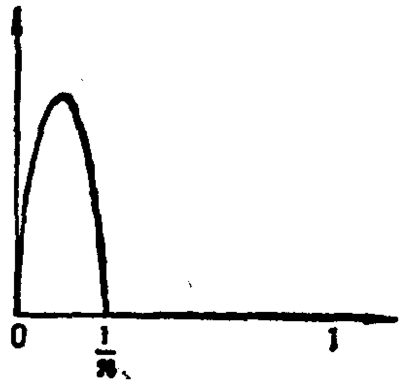


图 3

2° 在说明简单收敛的三个例子中，任何一个都不是一致收敛的；前两个特别清楚，因为极限f不连续；第三个例子中，任何有界区间上序列是一致收敛的，但在整个$\mathbb{R}$上不一致收敛.

一致收敛的距离和拓扑 一致收敛的研究可以通过在X到Y的映射集合$\mathscr{F}(X, Y)$上引进拟距离来简化.

设f, g是集合X到距离空间Y的两个映射，置

$$d(f, g)=\sup_{x\in X}d(f(x), g(x)).$$

这是有限数或$+\infty$；根据以前对集合上的拟距离的研究，对于任何$x\in X$，

$$d_x(f, g)=d(f(x), g(x))$$

是$\mathscr{F}(X, Y)$上的拟距离，故

$$d(f, g)=\sup d_x(f, g)$$

也是拟距离. 此外,

$$(f \neq g) \Rightarrow (d(f, g) \neq 0).$$

当 Y 有有限直径时, $d(f, g)$ 总是有限的, 故 d 是 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的距离; 当 Y 任意时, 有时用 $\inf(d, 1)$ 来代替拟距离 d 较方便; $\inf(d, 1)$ 是距离, 且在 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上定义了与 d 定义的一样的拓扑和一样的一致结构.

与拟距离 d 相联系的 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的拓扑称为*一致收敛拓扑*; 这一术语的合理性由下列命题可见:

命题 22-4 X 到 Y 的映射列 (f_n) 一致收敛于 f, 这个说法等价于下列说法: 在被赋以一致收敛拓扑的空间 $\mathscr{F}(X, Y)$ 中, 点列 f_n 收敛于点 f.

事实上, 函数列 f_n 一致收敛于 f, 这个说法等价于下列说法: 对于任何 $\varepsilon>0$, 当 n 充分大时, 有

$$d(f(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon \quad \text{对任何 } x \in X \text{ 成立},$$

这又等价于 $d(f, f_n) \leqslant \varepsilon$.

一致收敛在图象上的解释 利用 X 到 Y 的映射 f 的图象, 可对一致收敛提供一种方便的直观解释:

设 $B(f, \varepsilon)$ 为满足

$$d(y, f(x)) \leqslant \varepsilon$$

的 $X \times Y$ 的点 (x, y) 的集合, 这个集合构成围绕 f 的图象的某种半径为 ε 的管子.

$d(f, g) \leqslant \varepsilon$ 等价于

$$d(f(x), g(x)) \leqslant \varepsilon$$

对于任何 $x \in X$ 成立, 或者也等价于 g 的图象包含在 $B(f, \varepsilon)$ 中.

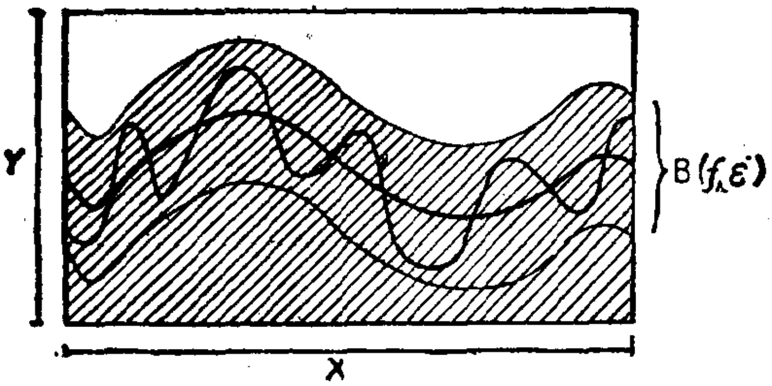


图 4

说序列(f_n)一致收敛于f,等于说,对于任何$\varepsilon>0$,任何从某个范围起的f_n,其图象都在$B(f, \varepsilon)$中.现在就能很好地看出,在上面的例1中,为什么f_n不一致收敛到0,因为对于每个$\varepsilon<\frac{1}{4}$,任何一个f_n的图象都不含于$B(0, \varepsilon)$之中.

完备空间的情形 引入$\mathscr{F}(X, Y)$上的拟距离d后,就可谈论函数的 Cauchy 列,并陈述下列定理:

定理 22-5 当距离空间Y完备时,空间$\mathscr{F}(X, Y)$也完备.

证明 设(f_n)为$\mathscr{F}(X, Y)$的 Cauchy 列.对于任何$x\in X$,不等式$d(f_p(x), f_q(x))\leqslant d(f_p, f_q)$指出$Y$的点列$(f_n(x))$是 Cauchy 列.由于$Y$完备,它具有极限,记作$f(x)$.

既然f_n是 Cauchy 列,对于任何$\varepsilon>0$,存在整数$n(\varepsilon)$,使得对于任何$p, q\geqslant n(\varepsilon)$和任何$x\in X$,有

$$d(f_p(x), f_q(x))\leqslant\varepsilon.$$

如果在这个不等式中让x和p固定,而$q\to\infty$,则$f_q(x)$趋向于$f(x)$,因此我们得到不等式:

$$d(f_p(x), f(x))\leqslant\varepsilon \quad 对于任何\ p\geqslant n(\varepsilon)成立.$$

由这个不等式得到$d(f_p, f)\leqslant\varepsilon$,因此序列$f_n$在被赋以拟距离$d$的空间$\mathscr{F}(X, Y)$中收敛于$f$.

这样,这一空间就是完备的.

系 22-6 任何距离空间 E 可以完备化；其意义为存在完备距离空间 $\hat{E}$ 和 E 到 $\hat{E}$ 的子集上的等距 f，使得 $f(E)$ 在 $\hat{E}$ 中处处稠.

事实上，以 f 表示 E 到 $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ 的映射，它对于任何 $a\in E$ 联系由 $f_a(x)=\delta(a, x)$ 所定义的 $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ 的元素 f_a，这里 δ 表示 E 中的距离.

关系式 $$|\delta(a, x)-\delta(b, x)|\leqslant\delta(a, b)$$

和 $$|\delta(a, b)-\delta(b, b)|=\delta(a, b)$$

指出，在 $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ 中有

$$d(f_a, f_b)=\delta(a, b)\qquad 对于任何\ a,\ b\in E\ 成立.$$

因此，映射 f 是 E 到 $f(E)$ 上的等距. 所求的空间 $\hat{E}$ 无非是 $f(E)$ 在完备空间 $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ 中的闭包.

不难验证，E 的完备化在同构意义下是唯一的，其意义为如果有 E 的两个完备化 $(\hat{E}, f)$ 和 $(\hat{E}', f')$，$f(E)$ 到 $f'(E)$ 上的等距 $f'\circ f^{-1}$ 可以唯一的方式延拓为 $\hat{E}$ 到 $\hat{E}'$ 上的等距.

连续性在一致收敛下保持 现在假设 X 为拓扑空间，而 Y 总是距离空间. 于是我们可以谈论 X 到 Y 的映射的连续性. 我们即将看到这个特征在一致收敛下保持.

定理 22-7 设 f_n 为 X 到 Y 的映射列，它一致收敛于 f，a 为 X 的点.

如果所有 f_n 都在 a 上连续，那末 f 也在 a 上连续.

证明 给出 $\varepsilon>0$. 由于 f_n 一致连续，存在整数 n_0 使得

$$d(f(x), f_{n_0}(x))\leqslant\varepsilon\quad 对于任何\ x\in X\ 成立.$$

由于 f_{n_0} 在 a 上连续，存在 a 的邻域 V 使得

$$d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a))\leqslant\varepsilon\quad 对于任何\ x\in V\ 成立.$$

由此得到，对于任何 $x\in V$，有

$$d(f(x), f(a))\leqslant d(f(x), f_{n_0}(x))+d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a))$$
$$+d(f_{n_0}(a), f(a))\leqslant 3\varepsilon.$$

由于 ε 任意的，这个不等式证明了 f 在 a 上的连续性.

系 22-8 如果所有 f_n 都在 X 上连续，且一致收敛于 f，那末函数 f 也在 X 上连续.

系 22-9 设 f_n 为距离空间 X 到距离空间 Y 的连续映射列，如果对于 X 的任何紧集 K，f_n 在 K 上的限制一致收敛，那末序列(f_n)在 X 上收敛，且它的极限 f 连续.

这是上一定理和系 16-8 的直接推论.

我们将经常利用这一系.

定理 22-7 及其系可直接推广到连续函数族沿滤子基的一致极限.

相反，这里必须注意，定理 22-7 不能推广到简单收敛.

当连续函数列 f_n 简单收敛于函数 f 时，f 具有一定的正则特征，但它并不总是连续的. 例如，单项式 $f_n(x)=x^n$ 的序列在$[0, 1]$上简单收敛于这样的函数 f：它在$[0, 1[$上为 0，而在 $x=1$ 上为 1.

空间 $\mathscr{C}(X, Y)$ 我们将用 $\mathscr{C}(X, Y)$记由拓扑空间 X 到距离空间 Y 的连续映射所组成的 $\mathscr{F}(X, Y)$的子空间. 由上一定理可得 $\mathscr{C}(X, Y)$是被赋以一致收敛拓扑的 $\mathscr{F}(X, Y)$的闭子空间；当后者完备时，$\mathscr{C}(X, Y)$也完备. 因而可以陈述：

定理 22-10 当 Y 完备，$\mathscr{F}(X, Y)$上被赋以一致收敛的拟距离时，由连续映射组成的子空间 $\mathscr{C}(X, Y)$也完备.

注 甚至在 X 和 Y 上强加上十分苛刻的正则性假设时，空间 $\mathscr{C}(X, Y)$一般并不紧.

例如假设 X 和 Y 是紧的，且恒等于区间$[0, 1]$. 于是集合 $\mathscr{C}(X, Y)$无非就是定义在$[0, 1]$上取值在$[0, 1]$中的连续数值函数全体.

在 $\mathscr{C}(X, Y)$上选择适当的距离后，这个空间是完备的，但不是紧的，甚至不是局部紧的. 例如这个空间的元素 0 没有任何紧

邻域，因为对于任何 $k>0$，用 $f_n(x)=k\sin^2 nx$ 定义的序列不包含任何收敛子序列.

子集集合上的一致收敛 数值函数列 $x\to 1/[1+(x-n)^2]$ 简单收敛于函数 0；但这一收敛是不一致的；相反，对于 $\mathbb{R}$ 的任何区间 $[a, b]$，这些函数在 $[a, b]$ 上的限制一致收敛于 0.

更一般地，系 22-9 指出在任何紧集上一致收敛的意义.

这是下列的有普遍重要性的概念的特殊情形.

定义 22-11 设 X 为任意集合；Y 为距离空间，$\mathscr{A}$ 为 X 的子集集合. 我们以 f, f_n 表示 X 到 Y 的映射.

我们说 f_n 在任何 $A\in\mathscr{A}$ 上一致收敛于 f，是指对于任何 $A\in\mathscr{A}$，f_n 在 A 上的限制一致收敛于 f 在 A 上的限制.

例 1° 如果 $\mathscr{A}$ 只有一个元素 X，则我们又得到通常的一致收敛.

2° 如果 $\mathscr{A}$ 是 X 的退化为一个点的子集全体，则我们又得到简单收敛.

3° 如果 $\mathscr{A}$ 是 X 的紧集全体，则我们得到在任何紧集上的一致收敛.

一致收敛和单收敛之间的关系 许多例子向我们指出，函数列的简单收敛性不一定导致它的一致收敛性. 然而下面是一种使该命题成立的重要情形：

引理 22-12 设 X 为紧空间，f, f_n（其中 $n=1, 2, \cdots$）为 X 到距离空间 Y 的连续映射.

如果对于任何 $x\in X$，距离列 $d(f(x), f_n(x))$ 递减且趋向于 0，那末 f_n 对 f 的收敛是一致的.

事实上，对于任何 $\varepsilon>0$，集合 $X_n=\{x: d(f(x), f_n(x))\geqslant\varepsilon\}$ 是闭集；X_n 的序列递减，且它们的交是空集.

因此，存在 n_0 使得 $(n\geqslant n_0)$ 导致 $(d(f(x), f_n(x))<\varepsilon)$，而这就

是 f_n 对 f 的一致收敛.

系 22-13(称为 Dini 定理)　如果 X 是紧空间，f 和 $f_n \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$，且序列 (f_n) 单调简单收敛于 f，那末收敛是一致的.

我们应用引理，并只要注意到序列 $|f(x)-f_n(x)|$ 递减趋向于 0.

Z　这里是序列 f_n 单调，而并非每个 f_n 单调；此外这后一种理解仅当 X 被赋有序时才有意义，例如当 $X=[0, 1]$.

然而这种混淆却不会导致错误；事实上可以验证，当区间 $[a, b]$ 上的某个单调数值函数列 (f_n) 简单收敛于一个连续函数时，收敛是一致的(见习题 85).

23. 等度连续函数空间

尽管完备空间有前面一些定理体现出来的明显的好处，但是能够拥有紧函数空间的事还是颇为可贵的. 等度连续的概念为我们提供了一个重要的类.

定义 23-1　设 X 是拓扑空间，Y 是距离空间，E 为 $\mathscr{F}(X, Y)$ 的子集.

1° 设 $a \in X$. 我们说 E 在点 a 上等度连续，是指对于任何 $a>0$，存在 a 的邻域 V，使得对于任何 $f \in E$，有

$$\delta(f(V))<\varepsilon.$$

2° 同时，当 E 是距离空间时，我们说 E 是一致等度连续(或同等连续)的，是指对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使得对于任何 $f \in E$，$(d(x, y)<\eta)$ 导致

$$(d(f(x), f(y))<\varepsilon).$$

E 是一致等度连续，这种说法显然等价于以下说法：E 的所有的 f 有公共连续模 φ.

如果 E 一致等度连续，那末它不仅等度连续，并且任何 $f \in E$

是一致连续的.

例 23-2 1° 如果 f 表示 X 到 Y 的连续映射, 则集合 $\{f\}$ 处处等度连续, 但仅当 f 一致连续时它才一致等度连续.

2° 设 E 为 $[0, 1]$ 到自身的映射 $x \to x^n$ 的集合. 每个 f 一致连续, E 在 $[0, 1[$ 的任何点上都连续, 但 E 不是一致等度连续的.

3° 如果 X 和 Y 是距离空间, X 到 Y 的比为 k 的 Lipschitz 映射集合 E_k(其中 $k>0$)是一致等度连续的.

4° 设 X, I 为两个紧距离空间, f 为 $X\times I$ 到距离空间 Y 的连续映射. X 到 Y 的偏映射 f_i: $x\to f(x, i)$ 的集合 E 是一致等度连续的. 这是 f 在 $X\times I$ 上的一致连续性的直接推论.

命题 23-3 设 X 为紧距离空间, Y 为距离空间. 那末 $\mathscr{F}(X, Y)$ 的任何等度连续子集是一致等度连续的.

证明 设 $\varepsilon>0$; 如果 E 等度连续, 则对于任何 $x\in X$, 存在含 x 的开集 ω_x, 使得对于任何 $f\in E$, $\delta(f(\omega_x))<\varepsilon$. 根据引理 18-1, 于是存在数 $\rho>0$, 使得 X 中任何半径为 ρ 的开球包含在诸 ω_x 的一个之中; 换句话说, $(d(x, y)<\rho)$ 导致 $d(f(x), f(y))<\varepsilon$.

一致等度连续性的解释 23-4

E 是函数的一致等度连续集等价于对所有 $f\in E$ 存在公共的连续模 φ.

于是设 $\alpha>0$ 任意, A 为 X 的 α 稠密子集, 其意义为对于任何 $x\in X$, 有 $d(x, A)<\alpha$. 对于任何 $f\in E$, 关系式 $d(x_1, x_2)\leqslant\alpha$ 导致

$$d(f(x_1), f(x_2))\leqslant\varphi(\alpha);$$

因此对 f 在 A 上的限制的了解就可导致对 f 在 X 上的至多相差 $\varphi(\alpha)$ 的了解.

换句话说, E 的函数 f 有某种用它们的连续模来度量的“刚性”.

例如，对$[0, 1]$上的比为k的Lipschitz数值函数f而言，只要$f(1/n)$, $f(2/n)$, …, $f(p/n)$, …已知，就处处在相差k/n的意义下已知.

一致等度连续性的所有推论都起源于这种"刚性".

定理 23-5(Ascoli)　设X和Y为两个紧距离空间，E为被赋以一致收敛拓扑的空间$\mathscr{C}(X, Y)$的子集.

E一致等度连续等价于E在$\mathscr{C}(X, Y)$中相对紧.

证明　1° 设E一致等度连续；为了指出$\bar{E}$是紧的，根据定理18-2的系，只需证明E的元素的任何无限序列S包含在$\mathscr{C}(X, Y)$中收敛的子列；由于$\mathscr{C}(X, Y)$完备(因为Y完备)，甚至只需指出S包含Cauchy子列.

设φ为所有$f\in E$的公共连续模. 对于任何$\varepsilon>0$，存在由半径为ε和中心为$x_i(i=1, \cdots, n)$的开球所组成的X的有限覆盖.

由于Y紧，在S中可选出子列$S_1(\varepsilon)$，使得对于任何f和$g\in S_1(\varepsilon)$，有

(1)　　$d_Y(f(x), g(x))\leqslant\varphi(\varepsilon)$　在点$x=x_1$上成立.

由这一序列$S_1(\varepsilon)$，我们又可以选出在点x_2上具有同样性质的序列$S_2(\varepsilon)$；并以后依此类推. 直到n次操作后，我们就构造了一个对每个点$x_i(i=1, 2, \cdots, n)$满足不等式(1)的子列$S_n(\varepsilon)$；我们把它表示为$S(\varepsilon)$.

由构造方法，对于任何$x\in X$，存在点x_i，使得

$$d_X(x, x_i)\leqslant\varepsilon,$$

这就导致　$d_Y(f(x), f(x_i))\leqslant\varphi(\varepsilon)$　对于任何$f\in S$成立.

对于任何$f, g\in S(\varepsilon)$，因而有

$$d_Y(f(x), g(x))\leqslant d_Y(f(x), f(x_i))+d_Y(f(x_i), g(x_i))$$
$$+d_Y(g(x_i), g(x))\leqslant 3\varphi(\varepsilon),$$

换句话说，有

(2) $$d(f,\ g)\leqslant 3\varphi(\varepsilon).$$

这样我们就明确给出了一种程序，它使任何序列 S 联系一个子列 $S(\varepsilon)$，后者的任意两个元素 $f,\ g$ 都满足关系式(2)．

对于 ε 依次给定值为 $(1,\ 1/2,\ \cdots,\ 1/n,\ \cdots)$，只需重复上述程序，就可得到逐次的序列：

$$S,\ S(1),\ S(1,\ 1/2),\ \cdots,\ S(1,\ 1/2,\ \cdots,\ 1/n),\ \cdots$$

其中每一个都是前一个的子列．

由于 $\varphi(1/n)$ 有极限为 0，这个序列的对角线列是 Cauchy 列*)．这就是所求序列．

2° 设 E 为 $\mathscr{C}(X,\ Y)$ 的紧子集．

对于任何 $\varepsilon>0$，存在 E 的点的有限序列 $(f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n)$，使得开球 $B(f_i,\ \varepsilon)$ 构成 E 的开覆盖．对于这每个 f_i，存在 $\eta_i>0$，使得不等式

$$d_X(x_1,\ x_2)<\eta_i$$

导致
$$d_Y(f_i(x_1),\ f_i(x_2))<\varepsilon.$$

设 η 为这些 η_i 中最小的数；对于任何 $f\in E$，于是由注意到 f 属于某个 $B(f_i,\ \varepsilon)$ 从而有：

$$d_Y(f(x_1),\ f(x_2))\leqslant 3\varepsilon,$$

其中只需
$$d_X(x_1,\ x_2)\leqslant\eta.$$

换句话说，E 是一致等度连续的．

Z 定理 23-5 不能推广到 X 或 Y 是局部紧而非紧的情形．

例如，[0, 1] 到 $\mathbb{R}$ 的常数映射的集合 E 显然是一致等度连续的；然而它不是相对紧的．

*) 我们曾经提到过，本书总是避免利用选择公理．但是这里用了 Cantor 对角线方法，它需要承认选择公理或较弱的可数选择公理．这对 Ascoli 定理来说是本质的——译者注

同样，$\mathbf{R}$ 到 $[0, 1]$ 的映射 $x \to 1/[1+(x-n)^2]$ 的集合是一致等度连续的，但它不是相对紧的.

例 区间 $[0, 1]$ 到区间 $[a, b]$ 的比为 k 的 Lipschitz 映射集合对于一致收敛拓扑是紧的.

注 23-6 更一般地，如果 X 是紧距离空间，Y 是任意距离空间，E 是被赋以一致距离的 $\mathscr{C}(X, Y)$ 的子集，那末 E 是相对紧的等价于 E 一致等度连续以及 $\bigcup_{f \in E} f(X)$ 相对紧，即 E 的 f 在 Y 的同一个紧集中取值. 这一等价性是 Ascoli 定理的一个容易的推论.

24. 全变差和长度

直到现在为止，我们所研究的诸如连续、一致连续、一致收敛等概念都没有度量特性，即使当利用一种距离对研究它们更为方便时，也是如此.

相反，我们即将定义的全变差则表现出本质上是一种度量特性.

设 T 为全序集（它将起着参数集的作用），f 为 T 到距离空间 E 的映射；为了简化记号，我们将以 $|xy|$ 来表示 E 的两点 x, y 的距离.

定义 24-1 对于任何 T 的有限集 σ，所谓 f 在 σ 上的全变差是指数

$$V_\sigma = \sum_i |f(t_i) f(t_{i+1})|,$$

其中 $t_i (t_1 < t_2 < \cdots < t_n)$ 表示 σ 的点.

三角形不等式立刻指出 $(\sigma \subset \sigma') \Rightarrow (V_\sigma \leqslant V_{\sigma'})$；换句话说，$V_\sigma$ 是 σ 的递增函数. 于是自然可提出下列定义：

定义 24-2 对于任何 $A \subset T$，所谓 f 在 A 上的全变差是指有

限或无限正数 V_A，它定义为：

$$V_A=\sup V_\sigma \text{（对于所有有限 } \sigma\subset A\text{）}.$$

当 $V_A<\infty$，我们说 f 在 A 上有有界变差.

显然 V_A 是 A 的递增函数.

特别是，如果 T 有第一个点 α 和最后一点 β，则有

$$V_T\geqslant V_{\{\alpha,\beta\}} \quad \text{或} \quad V_T\geqslant|f(\alpha)\ f(\beta)|.$$

例 1° 设 f 为 T 到 $\mathbb{R}$ 的递增映射.

关系式 $\quad V_\sigma=\sum(f(t_{i+1})-f(t_i))=f(t_n)-f(t_1)$

指出，如果 T 有第一个点 α 和最后一个点 β，则

$$V_T=f(\beta)-f(\alpha).$$

如果 f 递减，则

$$V_T=|f(\beta)-f(\alpha)|.$$

2° 设 f 为 $\mathbb{R}$ 的区间 $[a, b]$ 到距离空间 E 的比为 k 的 Lipschitz 映射.

对于任何 $\sigma=\{t_i\}\subset[a, b]$，我们有

$$V_\sigma\leqslant k\sum(t_{i+1}-t_i)\leqslant k(b-a).$$

因此
$$V_{[a,b]}\leqslant k(b-a).$$

命题 24-3 全变差在下列意义下是可加的：对于任何 $x\in T$，如果置

$$T_1=(]\leftarrow, x])\cap T \quad \text{和} \quad T_2=([x, \rightarrow[)\cap T,$$

那末有
$$V_T=V_{T_1}+V_{T_2}.$$

事实上，由于 V_σ 是 σ 的递增函数，我们也有

$$V_T=\sup V_\sigma, \text{对于所有含 } x \text{ 的有限 } \sigma \text{ 成立}.$$

既然一个这样的有限的 σ 无非就是某个 T_1 的含 x 的 σ_1 和某个 T_2 的含 x 的 σ_2 的并，从而

$$V_\sigma=V_{\sigma_1}+V_{\sigma_2};$$

因此我们有

$$V_T=\sup V_\sigma=\sup(V_{\sigma_1}+V_{\sigma_2})=\sup V_{\sigma_1}+\sup V_{\sigma_2}=V_{T_1}+V_{T_2}.$$

定义 24-4 设 T, T' 为两个全序集，f, f' 为 T, T' 各自到 E 的两个映射. 我们说 f, f' 是等价的，是指存在 T' 到 T 上的递增双射 φ，使得 $f'=f\circ\varphi$.

这样的关系显然是自反的、对称的和传递的，因而是等价关系.

命题 24-5 如果 f 和 f' 等价，那末 f 和 f' 分别在 T 和 T' 上的全变差 V, V' 相等.

事实上，对于任何 x', $y'\in T'$，有

$$|f'(x')f'(y')|=|f(\varphi(x'))f(\varphi(y'))|;$$

因而对于任何 $\sigma'\subset T'$, f' 在 σ' 上的全变差等于 f 在 $\sigma=\varphi(\sigma')$ 上的全变差.

由此得到 $V'\leqslant V$；同理可证 $V\leqslant V'$，故等式成立.

参数化曲线 今后我们将只考虑 T 是 $\mathbb{R}$ 的区间 $[a, b]$ 和 f 是连续的情形；在这种情形，我们说，偶 (T, f) 是*参数化曲线*或*路径*，并称 V_T 为这一曲线的*长度*；当这一长度有限时，我们说曲线是*可度长的*.

对于 T 的任何有限子集 σ，设

$$\sigma=\{t_1, t_2, \cdots, t_n\},\quad 其中\ a=t_1<t_2<\cdots<t_n=b,$$

我们称数

$$\mu(\sigma)=\sup_i|t_{i+1}-t_i|$$

为 σ 的*模*.

定理 24-6 对于任何参数化曲线 (T,f)，V_T 是 V_σ 当模 $\mu(\sigma)$ 趋向于 0 时的极限.

换句话说（为固定想法，假设 $V_T<\infty$），对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使得

$$(\mu(\sigma)<\eta)\Rightarrow(V_T-V_\sigma<\varepsilon).$$

有时我们把这个定理说成是：曲线的长度是曲线上的内接多边形长度的极限，这里是指把任何偶(σ, f)称为内接多边形，其中 T 的有限子集 σ 包含 a 和 b.

证明 我们假设 $V_T<\infty$；当 $V_T=\infty$ 时，证明完全类似.

对于任何 $\varepsilon>0$，根据 V_T 的定义，存在有限的 σ_0, $\sigma_0=\{t_1, t_2, \cdots, t_{n_0}\}$，使得

$$V_T-V_{\sigma_0}\leqslant\varepsilon.$$

由于 f 在 T 上一致连续，存在数 $\eta>0$，使得$|u-v|<\eta$ 导致

$$|f(u)f(v)|<\varepsilon/n_0;$$

此外，我们将假定 η 小于联系 σ_0 的区间$[t_i, t_{i+1}]$的最小长度.

于是设 σ 为 T 的任意有限集，其模 $\mu(\sigma)<\eta$. σ_0 的每一区间$[t_i, t_{i+1}]$至少包含一个不同于 t_i 和 t_{i+1} 的点；以 t_i'（相应地，t_i''）表示 σ 的满足 $t<t_i$（相应地，$t>t_i$）的点 t 中的最大者（相应地，最小者）；置

$$f(t_i)=m_i;\quad f(t_i')=m_i';\quad f(t_i'')=m_i''.$$

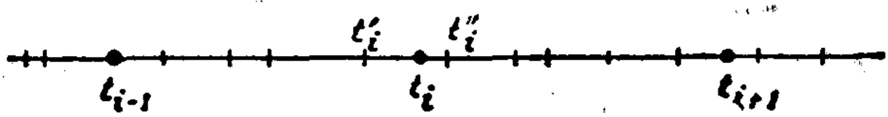


图 5

我们有

$$V_{\sigma\cup\sigma_0}-V_{\sigma_0}\leqslant\sum_i|m_i'm_i|+|m_im_i''|-|m_i'm_i''|$$

$$\leqslant\sum_i|m_i'm_i|+|m_im_i''|\leqslant2(\varepsilon/n_0)n_0=2\varepsilon.$$

把关系式：

$$V_T-V_{\sigma_0}\leqslant\varepsilon$$

$$V_{\sigma_0}\leqslant V_{\sigma\cup\sigma_0}$$

$$V_{\sigma\cup\sigma_0}-V_\sigma\leqslant2\varepsilon$$

两端相加，则得

$$V_T - V_\sigma \leqslant 3\varepsilon;$$

这就是把 ε 换为 3ε 的所求的方程式.

系 24-7 如果 $V_T<\infty$, 那末 T 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $t\to V_{[a,t]}$ 是递增连续的.

证明 给定 $\varepsilon>0$; 于是存在 $\eta>0$ 使得

$$(\mu(\sigma)<\eta)\Rightarrow(V_T-V_\sigma<\varepsilon)$$

以及 $$(|y-x|<\eta)\Rightarrow(|f(x)f(y)|<\varepsilon).$$

再设 x, y 为 $[a, b]$ 中满足 $0\leqslant y-x\leqslant\eta$ 的任意两个点.

存在含 x, y、但不含 $[x, y]$ 中的其他点、并且满足模 $\mu(\sigma)<\eta$ 的 σ; 我们以 σ_1 和 σ_2 表示 σ 在 $[a, x]$ 和 $[y, b]$ 上的迹.

关系式 $V_T<V_\sigma+\varepsilon$ 可写成

$$\begin{aligned}V_{[a,x]}+V_{[x,y]}+V_{[y,b]}&=V_{[a,b]}\leqslant V_\sigma+\varepsilon\\&=V_{\sigma_1}+|f(x)f(y)|+V_{\sigma_2}+\varepsilon\\&\leqslant V_{[a,x]}+\varepsilon+V_{[y,b]}+\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $V_{[x,y]}<2\varepsilon$ 对于任何满足 $|y-x|<\eta$ 的 x, y 成立.

下面的陈述有关赋范空间(参看第六章的 15-3 和 15-4), 但我们显然可以假设 E 是 Euclide 空间 $\mathbb{R}^n$.

系 24-8 如果 E 是赋范空间, 映射 f 有连续导数, 那末有

$$V_T=\int_a^b\|f'(t)\|dt.$$

证明 给定 $\varepsilon>0$; 由于 f' 一致连续, 存在 $\eta>0$ 使得当 $0<v-u<\eta$ 时, 有 $\|f'(v)-f'(u)\|<\varepsilon$; 第六章的命题 15-3 于是可指出:

$$\|f(v)-f(u)-(v-u)f'(u)\|<\varepsilon(v-u). \tag{1}$$

又设有限的 $\sigma\subset T$; 则存在另一个有限的 σ' 满足 $\sigma\subset\sigma'$, 使得 σ' 的相继两个点 t_i, t_{i+1} 满足 $(t_{i+1}-t_i)<\eta$, 并使得

$$\sum_i^a(t_{i-1}-t_i)\|f'(t_i)\|$$

与
$$\int_a^b \|f'(t)\| dt$$
至多相差 ε.

把关系式(1)用到给出的点对(t_i, t_{i+1})上，并利用三角形不等式，再求和，即得

$$\left|\sum\|f(t_i)\| - \sum(t_{i+1}-t_i)\|f'(t_i)\|\right| \leqslant \varepsilon(b-a), \tag{2}$$

故

$$\left|V_{\sigma'} - \int_a^b \|f'(t)\| dt\right| \leqslant \varepsilon(b-a) + \varepsilon. \tag{3}$$

而
$$V_\sigma \leqslant V_{\sigma'},$$
故
$$V_T = \sup V_\sigma = \sup V_{\sigma'}.$$

因此，关系式(3)证明了所求关系式.

特殊情形 如果 E 是被赋以 Euclide 范数的空间 $\mathbb{R}^n$，则用f_p表示 f 的坐标映射，关系式就变为

$$V_T = \int_a^b (\sum f_p^{2'}(t))^{1/2} dt.$$

乘积空间的参数化曲线 设 E_i 为距离空间的有限族；d_i 为 E_i 上的距离，d 为 E_i 的乘积 E 上的常用距离中的任意一个.

设 $f=(f_i)$为$[a, b]$到 E 的映射；V(相应地，V_i)为 f 的全变差(相应地，f_i 的全变差).

由不等式 $d_i(x_i, y_i) \leqslant d(x, y) \leqslant \sum d_i(x_i, y_i)$
可得一个类似于对在$[a, b]$的任何有限子集 σ 上的变差成立的不等式，故立即有：

$$V_i \leqslant V \leqslant \sum V_i.$$

特别是我们可陈述：

命题 24-9 距离空间的有限乘积的参数化曲线可度长这个说法，等价于下一说法：此距离空间在每个因子空间上的射影也是可度长的.

例 1° 设 Γ 是由 $[a, b]$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的连续映射 $f=(f_i)$ 所定义的 Euclide 空间 $\mathbb{R}^n$ 的曲线，Γ 可度长等价于每个 f_i 是有界变差的.

2° 设 Γ 为 $[a, b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上的图象；这里我们可把图象 Γ 与曲线 $x\to(x, f(x))$ 看作一样. 因此，当 f 有有界变差时，这一图象有有限长度.

Z 必须注意到，f 的全变差（或与 f 相联系的 $\mathbb{R}$ 的路径长度）从来不会等于 f 的图象的长度；后者是区间 $]V, V+b-a]$ 中的元素.

有界变差的数值函数 上面的例子指出有界变差的数值函数的重要性；我们由此也来对它作一简要的研究. 更确切地说，我们将研究 $[a, b]$ 上的有有界变差的有限数值函数的集合 $\mathscr{V}$ 的结构.

对于任何 $f\in\mathscr{V}$，我们以 $V(f)$ 表示 f 在 $[a, b]$ 上的全变差.

命题 24-10 1° $\mathscr{V}$ 是向量空间，且 V 是 $\mathscr{V}$ 上的半范数，其意义为：

$$V\geqslant 0;\ V(\lambda f)=|\lambda|V(f);\ V(f_1+f_2)\leqslant V(f_1)+V(f_2).$$

2° $\mathscr{V}$ 包含递增函数形成的凸锥*) $\mathscr{V}_0$，且 $\mathscr{V}$ 的任何元素是 $\mathscr{V}_0$ 的两个元素的差.

证明 1° 设 f 和 g 是 $[a, b]$ 上的任意两个数值函数，并置 $h=f+g$. 对于任何 $u, v\in[a, b]$，我们有：

$$\begin{aligned}|h(u)-h(v)|&=|(f(v)-f(u))+(g(v)-g(u))|\\&\leqslant|f(v)-f(u)|+|g(v)-g(u)|.\end{aligned}$$

于是对于 $[a, b]$ 的任何有限子集，有：

$$V_\sigma(h)\leqslant V_\sigma(f)+V_\sigma(g)\leqslant V_f+V_g,$$

故也有
$$V(f+g)=V(h)\leqslant V(f)+V(g).$$

从而当 f 和 $g\in\mathscr{V}$ 时，也有 $f+g\in\mathscr{V}$.

---

*) 向量空间中的集合 C 称为凸锥，是指它满足：

i) $\forall\lambda>0$; $\lambda C\subset C$; ii) $C+C\subset C$. ——译者注

另一方面，显然对于任何 $f\in\mathscr{V}$，有 $V(\lambda f)=|\lambda|V(f)$．因此 $\mathscr{V}$ 是向量空间，且 V 是 $\mathscr{V}$ 上的半范数．

2° 我们已经知道，当 f 递增时，有 $V(f)=f(b)-f(a)$，故 $\mathscr{V}_0\subset\mathscr{V}$．由于 $\mathscr{V}$ 是向量空间，如果 f 和 $g\in\mathscr{V}_0$，则也有 $f-g\in\mathscr{V}$；我们证明逆命题：

设 $f\in\mathscr{V}$；对于任何 $t\in[a, b]$，我们以 $\varphi(t)$ 表示 f 在 $[a, t]$ 上的全变差；置

$$\psi(t)=\varphi(t)+f(t).$$

对于任何满足 $u<v$ 的 $u, v\in[a, b]$，有

$$\psi(v)-\psi(u)=(\varphi(v)-\varphi(u))+(f(v)-f(u)).$$

但由全变差的可加性可得 $\varphi(v)-\varphi(u)$ 是 f 在 $[u, v]$ 上的全变差；因此有

$$\varphi(v)-\varphi(u)\geqslant|f(v)-f(u)|,\ \text{故}\ \psi(v)-\psi(u)\geqslant 0.$$

这样就有 φ 和 $\psi\in\mathscr{V}_0$；由于 $f=\psi-\varphi$，故性质得证．

系 **24-11** 任何 $[a, b]$ 上的有界变差函数在任何点上有左、右极限．

事实上，递增函数有这一性质，而相减仍保持这一性质．

连续函数情形 利用上面的记号，如果 f 是有界变差连续函数，则函数 φ 连续（系 24-7）；于是 ψ 也连续．

这样，任何有界变差连续数值函数等于两个递增连续函数的差．

有界变差数值函数的例子 24-12 1° 任何在 R 的区间 I 有界且按段单调的函数，即存在 I 的分为区间（可能退化为一点）的有限分划，使得 f 在每个区间上单调．此外，当 f 连续时，f 在 I 上的全变差为它在这些子区间上的变差的和．

所有初等函数都有这一特性．

2° 如果 f 是 $[a, b]$ 上比为 k 的 Lipschitz 映射，则有

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\leqslant k(b-a).$$

特别是有有界导数 f' 的可导函数 f 是这种情形；事实上，如果 $|f'|\leqslant k$, f 是比为 k 的 Lipschitz 映射.

更确切地说，如果 f' 连续，我们有

$$V(f)=\int_a^b |f'(t)|dt.$$

这是在系 24-8 中建立的关系式的特殊情形($n=1$).

3° 相反，下面是一个$[a, b]$上处处可导但有无限全变差的连续函数例子：

这是用关系式：

$$f(0)=0;\ f(x)=x^2\cos^2(\pi/x^2)\ \text{当}\ x\neq 0;$$

所定义的$[-1, 1]$上的函数 f.

事实上，对于任何整数 $n>1$, f 在$[n^{-\frac{1}{2}}, 1]$上的全变差等于$(1+1/2+\cdots+1/n)$，而这个和随 n 趋向于 $+\infty$.

IV. 习　　题

说明：较难的习题都打上了星号.

数直线 R 与空间 R^n

1° 设 f 是区间$[\alpha, \beta]$到区间$[a, b]$上的严格递增双射. 指出，f 连续，且反函数 f^{-1} 在$[a, b]$上有定义并连续(换句话说，f 是同胚).

*2° 设 A 和 B 是$]0, 1[$的两个可数处处稠子集.

a) 指出，存在无限多个 A 到 B 上的递增双射.

b) 指出，这种双射可以用唯一的方式延拓为$[0, 1]$到自身的同胚.

*3° 指出，不存在任何把区间$[0, 1]$分为非空闭子集的可数分划.

4° 以 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$表示 $x\in[0, 1[$的十进展开式；置 $S_n(x)=a_1+a_2+\cdots+a_n$，且设 $\lambda\in[0, 9[$. 指出，对于任何 n 满足 $S_n\leqslant\lambda n$ 的 x 的集合是没有孤

立点的紧集，但不包含任何区间.

5° 指出任何 **R** 到 **R** 的等距有形式为 $x \to a+x$ 或 $x \to a-x$.

6° 指出在 $\mathbf{R}^n (n \geq 2)$ 中，任何紧方块的余集是连通的.

7° 设 D 是 $\mathbf{R}^n (n \geq 2)$ 的区域.

a) 指出，对于 D 中的任意三个不同的点 a, b, c，在 D 中存在包含 a 和 b、但不包含 c 的折线.

b) 由此推出，D 不同胚于 **R** 的任何子集.

8° 指出，$\mathbf{R}^n$ 的任何简单弧在 $\mathbf{R}^n$ 中疏(利用习题 7).

9° 指出，$\mathbf{R}^n$ 中的由球面 $\sum x_i^2 = 1$ 去掉点 $(0, \cdots, 0, 1)$ 后的集合 A 同胚于 $\mathbf{R}^{n-1}$.（由 $n=2$ 或 3 开始，利用球极平面射影，然后推广这一处理方法）.

10° 指出，$\mathbf{R}^n$ 的任何开球同胚于 $\mathbf{R}^n$.

11° 指出，$\mathbf{R}^2$ 的任何紧凸集或者是区间，或者同胚于闭圆盘. 陈述并证明 $\mathbf{R}^n$ 中的类似结果.

12° 设 ω 为 $\mathbf{R}^n$ 的包含 O 的开集. 又设 E 是满足 $[0, x] \subset \omega$ 的 $x \in \omega$ 的集合（ω 中以 O 为中心的星形）；指出 E 是开集，且与以 O 为起点的任何半直线 δ 交于一个区间.

对于任何 δ，置 $\varphi(\delta)$ 为 $(\delta \cap E)$ 的长度. 指出，φ 是 δ 的下半连续函数（参看第六章）.

13° 设 f 为 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的子集 A 上的等距满射.

a) 指出，$\mathbf{R}^n$ 的任何直线 Δ 的象 $f(\Delta)$ 是直线.

b) 由此导得 f 是仿射变换，且 $A = \mathbf{R}^n$.

拓 扑 空 间

14° 设 E 为包含处处稠可数子集的拓扑空间. 指出，E 的任何不相交的非空开集族是有限的或可数的.

15° 考虑 **R** 的下列形式的子集集合 $\mathscr{O}$:

$$X = (\mathbf{R} \text{ 的开集}) - (\text{有限或可数集}).$$

指出，$\mathscr{O}$ 是对于 **R** 上的某种拓扑 $\mathscr{C}$ 的开集的集，并研究这种拓扑. 特别是，确定 $\mathscr{C}$ 的紧集.

16° 设 A 为 $\mathbf{R}^2$ 的闭子集；S 为 A 中满足如下条件的点 x 的集合：x 在 A 中有一包含在顶点为 x、角度 $<\pi$ 的角内的邻域. 指出 S 为有限集或可数集.

17° 以 X^* 表示拓扑空间 E 的子集 X 的边界；指出，

$$\mathbf{X}^* = (X \cap (\bar{\complement} X)) \cup (\bar{X} \dot{-} X).$$

18° 设 E 为拓扑空间; X 为 E 的子集. 我们把 E 中那些是 X 的点列的极限的点全体称为 X 的**序列附着集**; 我们说 X 是**序列闭的**, 是指它恒同于它的序列附着集. 通过例子指出, X 的序列附着集并非总是序列闭的(利用习题 107). 什么是 X 的**序列闭包**是否总存在序列闭包?

19° 设 E 为拓扑空间, X 为 E 的闭子集. 我们称 X 的聚点集 $X^{(1)}$ 为 X 的**导集**; 再假设 $X^{(n+1)}$ 为 $X^{(n)}$ 的导集, 来定义逐次导集 $X^{(n)}$. 然后, 置

$$\mathbf{X}^{\omega} = \bigcap X^{(n)}.$$

在 $\mathbf{R}$ 中构造闭集 A, 使得 $A^{(n)}$(相应地, A^{ω})退化为一点.

20° 设 f 为拓扑空间 E 到 $\mathbf{R}$ 的映射; 指出, 如果对于任何 $\lambda \in \mathbf{R}$, $\{x: f(x) < \lambda\}$ 和 $\{x: f(x) > \lambda\}$ 是开集, 那末 f 连续. 更一般地, 设 f 为 E 到拓扑空间 F 的映射; (ω_i) 为 F 的开集族, 使得 F 的任何开集都是开集 ω_i 的有限交的并(我们说这个族**生成** F 的拓扑). 怎样用开集 ω_i 来刻划连续映射 f?

21° 我们说拓扑空间 E 到另一个拓扑空间 F 的映射 f 是**开的**, 是指对于任何 E 的开集 ω, $f(\omega)$ 是 F 的开集.

a) 指出, 乘积空间到每一因子空间的射影是开映射.

b) 刻划 $\mathbf{R}$(相应地, $\mathbf{R}^n$)到 $\mathbf{R}$ 的连续开映射的条件.

c) 指出, $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$ 的非常数全纯映射是开的.

22° 设 f 为拓扑空间 E 到 $\mathbf{R}$ 的连续映射. 指出, 对于任何 $\mathbf{R}$ 的开集 ω, $f^{-1}(\omega)$ 是 F_σ 开集(参看习题 73).

23° 设 E 为**有可数基**(参看习题 88)的拓扑空间, f 为 E 上的数值函数. 指出, 如果 M 表示其上 f 有局部最大值的点 $x \in E$ 的集合, 则 $f(M)$ 有限或可数.

24° 设 E 为有可数基的分离拓扑空间; 指出 E 的没有任何可数邻域的点的集合 P 是完全集(没有孤立点的闭集). 指出$(E \dot{-} P)$至多为可数集.

25° 指出, $\mathbf{R}$ 的开集集(和闭集集)有连续统势; 对于 $\mathbf{R}^n$ 讨论同样问题. 由此导得 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^p$ 的连续映射集的势.

26° 我们说 n 个变量的实系数二次形式 $\sum a_{ij} x_i x_j$ 是正定的, 是指它对于任何 $(x_i) \neq 0$ 大于 0. 指出, 在空间 $\mathbf{R}^N$ 中($N = n(n-1)/2$), 表示这些二次形式的点 $a = (a_{ij})$ 的集合是开集.

27° 是否存在 $[0, 1]$ 上的连续数值函数 f, 使得 $f(x)$ 对于无理数 x 是有理数, 而对于有理数 x 是无理数?

28° 在 R 中求两个子集 X, Y，使得它们中的每一个都是另一个通过连续双射后的象，但它们并不同胚.

29° 设 X 为拓扑空间 E 的子集. 在怎样的条件下，X 的特征函数是连续的?

30° 设 X, Y 为分离拓扑空间 E 的两个子集，并且 $E=X\cup Y$. 当 f 在 X 和 Y 上的限制连续时，f 是否也连续? 考察 X 和 Y 都是闭集(或开集)的情形.

31° 指出，对于任何拓扑空间 E，$E\times E$ 的对角线 Δ 与 E 同胚.

32° 设 f 为拓扑空间 E 到拓扑空间 F 的连续映射，Γ 为 f 在 $E\times F$ 上的图象. 指出 E 和 Γ 同胚.

33° 设 E 为分离拓扑空间，f 为 E 到自身的连续映射. 指出 E 的满足 $f(x)=x$ 的点 x 的集合 I 是闭集.

给出 I 是空集而 E 是紧距离空间的各种例子. 指出这时 $d(x, f(x))$ 总保持大于常数 $k>0$.

指出，当 E 是 R^2 的包含 O 的线段的有限并时，I 非空.

34° 指出，为使空间 E 分离，必需且只需 E^2 的对角线在 E^2 中是闭集.

35° 设 f 为分离空间 X 到自身的连续映射. 指出 X 的满足 $f(x)=x$ 的点 x 的集合是闭集[1].

36° 设 f, g 为拓扑空间 E 到分离拓扑空间 F 的两个连续映射. 如果 f 和 g 在 E 的处处稠子集上重合，指出 $f=g$.

37° 设 $(a_{m,n})$ 为 $\mathbb{N}^2$ 到每点都有闭邻域基[2]的分离拓扑空间的映射. 指出，如果

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} a_{m,n}=a,\ \lim_{m\to\infty} a_{m,n}=b_n,\quad \text{那末}\ \lim_{n\to\infty} b_n=a.$$

38° 设 E 为分离拓扑空间，(a_n) 为 E 的收敛于 a 的点列. 指出集合 $\{a, a_1, a_2, \cdots\}$ 是紧的.

39° 构造 R^2 到 R 的映射 $(x, y)\to f(x, y)$ 如下:

1. 偏映射 $x\to f(x, y)$ 和 $y\to f(x, y)$ 都是连续的.
2. f 的不连续点集合在 R^2 中处处稠.

40° 设 E 为拓扑空间，(ω_i) 为 E 的开集基(参看习题 88). 指出，如果 E 的任何由 ω_i 所构成的覆盖包含有限子覆盖，那末 E 是紧的.

---

1) 原文如此. 但这个题实际上是题 33° 的一部分. ——译者注

2) 这一条件为译者所加，否则本题不成立，原作者已同意译者的修改.——译者注

41° 设(K_n)是分离空间E的非空紧集的递减列. 指出,$K=\cap K_n$非空,且对于任何包含K的开集ω, 存在K_n包含在ω中.

42° 设E为无限紧空间; Δ表示$E\times E$的对角线. 指出存在$E\times E$的可数子集A,满足

$$A\cap\Delta=\varnothing,\ \bar{A}\cap\Delta\neq\varnothing.$$

43° 我们以$\prec$表示定义在集合$E=[0,1]^2$上的关系:

$(x, y)\prec(x', y')$是指或者$(x<x')$, 或者$(x=x', y\leqslant y')$.

a) 指出,这是全序关系(字典排列顺序).

b) 指出被赋以与这一序关系相联系的拓扑的E是紧的.

44° 设(A_n)为$\mathbf{R}$的子集的递减列,其中每一个都是有限个两两不交的闭区间的并. 又假设组成A_n的每个区间恰好包含两个组成A_{n+1}的区间, 且这些区间的直径随着$1/n$趋向于0. 指出集合$A=\cap A_n$是紧的, 且没有孤立点; 再指出这种A中的任意两个是同胚的.

45° 指出,在任何分离空间X中, 如果两个紧子间A和B不相交, 那末它们具有不相交的邻域. (从处理B退化为一点的情形着手).

46° 设X为紧空间, Y为任意拓扑空间. 指出, 如果A在$X\times Y$中闭, 则它在Y上的射影也是闭的.

47° 设f为空间X到分离空间Y的映射.

a) 指出,如果f连续, 则f的图象在$X\times Y$中闭. 用例子指出(其中$X=Y=\mathbf{R}$), 逆命题不成立.

b) 指出,相反,当Y是紧的时,这两个论断是等价的.

48° 设L和X是两个紧空间, f为$L\times X$到分离空间Y的连续映射,且满足对于任何$\lambda\in L$, X到Y的映射$x\to f(\lambda, x)$是单射. 又设$y_0\in Y$.

1° 指出,使方程$y_0=f(\lambda, x)$有解的$\lambda\in L$的集合L_0是L中的闭集.

2° 指出,这一方程的解$x=\varphi(\lambda)$是L_0上的λ的连续函数.

49° 设在$\mathbf{R}^3$中有两个圆C_1和C_2. 基于最大值性质, 指出, 至少存在一条直线与C_1和C_2以及它们的轴相交.

50° 在平面$\mathbf{R}^2$上引入两条任意的轴, 并用方程$ax+by+c=0$来定义直线, 这里a和b不全为零. 利用这一形式,建立这些直线的集合D和$\mathbf{R}^3$中通过原点的直线集合间的对应. 由此能在D上导得怎样的自然拓扑?这一拓扑是否依赖轴的选择?

在D上可以附加怎样的元素使它变为紧的?列举其他的与这个

紧空间同胚的空间.

能否用类似的方式处理 $\mathbf{R}^3$ 的直线?

51° 指出,如果乘积 $X\times Y$ 是紧的,则 X 和 Y 都是紧的. 当 $(X\times Y)$ 为局部紧时,类似的叙述是怎样的?

52° 设空间 $\mathbf{R}^3$ 中有三条直线 Δ_1, Δ_2, Δ_3, 两两不平行也不相交. 指出,在所有三角形 (x_1, x_2, x_3), $x_i\in\Delta_i(i=1, 2, 3)$ 中,有一个面积(相应地,周长)最小者.

53° 指出,$\mathbf{R}^2$ 中至少有一个坐标为无理数的点的集合是连通集.

54° 设 (C_n) 是拓扑空间 E 的连续统的递减列. 指出它们的交 $C=\cap C_n$ 也是连续统.

55° 指出函数 $y=\sin 1/x(x\in]0, 1])$ 的图象是连通的.确定它的闭包,并指出这是连续统,但不是简单孤.

56° 设 G 为 $\mathbf{R}^n$ 的开集.

a) 指出 G 的每个连通成分是开集(因而也是区域).

b) 指出这些连通成分的集合至多是可数集.

57° 设 A 为全序集,并被赋以与它的序相联系的拓扑. 指出,如果 A 是连通的,则 A 的任何有上界子集有上确界,且 A 的任何点都没有后继者(y 是 x 的后继者是指 $x<y$, 且 $]x, y[=\varnothing$). 逆命题是否成立?

*58° 设 f 为 $[0, 1]$ 到自身的同胚.

1. 指出 f 或者使端点不变,或者使端点交换.

2. 如果 $f^2=$ 恒等映射,指出,或者 $f=$ 恒等映射,或者 f 在某种可明确的意义下,是中心对称的变形.

59° 设 f 是 $[0, 1]$ 到自身的连续映射;指出 f 至少有一个不动点[1].

60° 设 A 为 $[0, 1]\times[0, 1]$ 的闭子集,且对于任何 $x\in[0, 1]$, 使 $(x, y)\in A$ 的 y 集合是闭区间 l_x. 指出,存在 x 满足 $x\in l_x$.

61° 设 E 为拓扑空间,A 为 E 的子集. 指出,任何与 $\mathring{A}$ 和 $\mathring{C}A$ 相交的 E 的连通子集也与 A 的边界相交.

距 离 空 间

62° 设 E 为 $\mathbf{R}^3$ 的球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 被赋以测地距离而得的距离空间.

对于任何 $m\in E$ 和数 $\rho>0$, 计算中心为 m、半径为 ρ 的"圆"在 E 上的直

1) 本题是著名的 Brouwer 定理的特例,但这里它又是题 33° 的特例.——译者注

径 $\delta(\rho)$. 指出 $\delta(\rho)$ 不是 ρ 的递增函数.

*63° 我们采用在第一章有关 Cantor-Bernstein 定理的习题中的记号[1].

现在假设 A 和 B 是拓扑空间(相应地, 距离空间), φ 和 ψ 是同胚(相应地, 等距). 那末在这一习题中所提示的证明将导致怎样的陈述?

64° 设 (a_n) 为距离空间的点列. 指出这一序列的附着值集合恒同于该序列的收敛子列的极限集合.

65° 设 f 为距离空间 E 到拓扑空间 F 的映射. 指出 f 在点 a 上的连续性与下列性质等价:

对于 E 的任何满足 $\lim a_n = a$ 的序列 (a_n), 有 $\lim f(a_n) = f(a)$.

66° 设 f 为拓扑空间 X 到距离空间 Y 的映射. 对于任何 $x_0 \in X$, 我们称非负数 $\omega(f, x_0) = \inf(f(V)$ 的直径)(其中 V 遍历 x_0 的邻域集)为 f 在 x_0 上的振幅.

a) 指出 f 在 x_0 的连续性等价于等式 $\omega(f, x_0) = 0$[2].

b) 指出, 对于任何 $\varepsilon > 0$, E 的满足 $\omega(f, x) \geqslant \varepsilon$ 的点 x 的集合是闭集.

67° 设 E 为距离空间, $(m, n) \to a_{mn}$ 为 $\mathbb{N}^2$ 到 E 的映射. 假设

$$\lim_{n\to\infty} a_{mn} = a_m, \quad \lim_{m\to\infty} a_m = a.$$

指出, 存在 $\mathbb{N}$ 的子列 $n \to p_n$, 使得

$$\lim a_{n, p_n} = a.$$

这个结果能否推广到拓扑空间 E 上?

68° 设 X 为距离空间, A 为 X 的子集. 对于任何数 $\rho > 0$, 我们以 $B(A, \rho)$ 表示满足 $d(x, A) < \rho$ 的 $x \in X$ 的集合.

a) 指出 $$B(A, \rho) = \bigcup_{x\in A} B(x, \rho).$$

b) 指出 $$\overline{A} = \bigcap_{\rho} B(A, \rho).$$

69° 设 X 为距离空间, A, B 为 X 的两个闭子集. 以 D_A, D_B, I 分别表示满足

$$d(x, A) < d(x, B);\ d(x, A) > d(x, B);\ d(x, A) = d(x, B)$$

的 x 的集合.

a) 指出 D_A 和 D_B 是开集. 由此推得 A 和 B 具有不相交的开邻域.

---

1) Cantor-Bernstein 定理是说, 如果对于集合 A, B, 存在单射 $\varphi: A \to B$ 和单射 $\psi: B \to A$, 那末必定存在 A, B 间的双射. ——译者注

2) 有关振幅和连续性的结果已出现在课文的 16-9 中. ——译者注

b）指出 I 是闭集，并对 X 是平面、A，B 表示 X 的直线、圆周或闭圆盘的情形，确定这一集合.

70° 指出任何距离空间同胚于有界距离空间. 对于一致结构是否有类似的陈述？

71° 构造距离空间 E 到另一个距离空间 F 的连续（甚至一致连续）双射、但不是同胚的例子.

*72° 设 f 是拓扑空间 E 的处处稠集 A 到距离空间 F 的映射，且满足对于任何 $a\in E$，存在 $\lim\limits_{x\in A,\, x\to a} f(x)$. 指出，$f$ 存在 E 到 F 的唯一的连续延拓.

73° 我们说，拓扑空间的子集 X 是 F_σ（相应地，G_δ），是指 X 为闭集的可数并（相应地，开集的可数交）.

a）指出 F_σ 类（相应地，G_δ 类）对于可数并（相应地，可数交）是稳定的.

b）指出 F_σ 的余集是 G_δ；反之也然.

c）给出 $\mathbf{R}$ 的子集的例子，它是 $\mathbf{R}$ 的 F_σ，但既非开集，也非闭集.

d）指出，在距离空间中，任何开集是 F_σ，而任何闭集是 G_δ.

74° 设 E 为被赋有拟距离 d 和与此拟距离相联系的拓扑. 指出，对于任何 $X\subset E$，映射 $x\to d(x, X)$ 连续. 指出

$$\overline{X}=\{x: d(x, X)=0\}.$$

75° 如果数值函数 f 在 $\mathbf{R}^n$ 中一致连续，指出，

$$|f(x)|\leqslant a|x|+b,$$

其中 a 和 b 是非负常数，$|x|$ 是 x 到原点的距离.

76° 对于任何距离空间 E，指出距离 $d(x, y)$ 在 E^2 上一致连续.

77° 构造在 $[0, 1]$ 上的数值函数的例子，使得它处处有有限导数，但不是 Lipschitz 函数.

78° 设 E，F 为两个距离空间，Φ 为 E 到 F 的映射族. 假设，对于任何 $x\in E$，任何 $f\in\Phi$ 以及任何 $\varepsilon>0$，存在 $\eta(x, f, \varepsilon)>0$，使得

$$(d(x, y)<\eta(x, f, \varepsilon))\Rightarrow(d(f(x), f(y))<\varepsilon).$$

对于 η 不依赖于 ε、或不依赖于 x、或不依赖于 f、或既不依赖于 f 也不依赖于 x 等情况作出解释.

79° 设 E 为距离空间，$A\subset E$. 指出，$\overline{A}$ 的紧性等价于下列条件中的每一个：

a）任何 A 的点列包含着在 E 中收敛的子列.

b）任何 A 的无限子集至少有一个 E 中的聚点.

80° 设(F_i)为紧距离空间的闭集的有限族，且其交是空集. 指出，存在$\varepsilon>0$，使得任何与所有F_i都相交的集合有至少等于ε的直径.

*81° 设K是距离空间E的紧集；以$B(\varepsilon)$表示满足$d(x, K)<\varepsilon$的$x\in E$的集合. 指出这些$B(\varepsilon)$构成K的邻域基. 这一条件能否推广到非紧集合K?

82° 设E为紧距离空间. 指出，任何与E等距的E的距离子空间A与E恒同.

用简单例子指出，当E非紧时，这论点并不总成立.

83° 设X, Y为两个紧距离空间；f为X到Y的映射，g为Y到X的映射. 指出，如果f和g都等距，则有$f(X)=Y$和$g(Y)=X$.

84° 设E为非完备距离空间. 指出可在E上定义下列类型的连续函数：

a) f连续，但无界.

b) f连续、有界，但非一致连续.

当仅假设E非紧，但完备时，考察同样问题.

85° 本章中，我们强调函数列的简单收敛一般不导致一致收敛. 试证，在下列两种情形，结果却是成立的：

a) X为紧空间，f_n为X到$\mathbb{R}$的下半连续映射的递增列(即当$p\leqslant q$时，对于任何$x\in X$，有$f_p(x)\leqslant f_q(x)$)，而它简单收敛于连续函数f(这个结果推广了Dini定理).

b) $X=[0, 1]$，f_n为X到$\mathbb{R}$的递增映射(不一定连续)的序列，而它单收敛于连续函数f.

86° 设X, Y为两个距离空间，且X紧. 又设f和$f_n(n\in\mathbb{N})$为X到Y的连续映射.

指出，如果存在常数$k>0$，使得对于任何整数p, q和任何x，有

$$d(f(x), f_{p+q}(x))\leqslant kd(f(x), f_q(x)),$$

则f_n对f的简单收敛导致一致收敛. 这一结果推广了Dini定理.

*87° 指出任何紧距离空间或是有限集，或是可数集，或者有连续统的势.

更确切地说，任何无孤立点的完备距离空间包含一同胚于Cantor三分集[1]的集合.

---

1) Cantor三分集是$[0, 1]$中一个有连续统势的测度为零的完全集. 由$(0, 1)$中去掉$\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$，再对$\left(0, \frac{1}{3}\right)$，$\left[\frac{2}{3}, 1\right]$去掉$\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$，$\left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$，以后每次对余下的开区间去掉中间的1/3闭区间. 如此无限继续下去，最后得到的集合就是Cantor三分集. 它由三进小数展开式之不含数字2的全体小数组成. ——译者注

88° 所谓拓扑空间 E 的基是指任何 E 的开集族，满足：E 的任何开集是基的子族的并.

指出：

a）如果 E 有可数基，则 E 的任何开覆盖可选出可数子覆盖.

b）如果 E 有可数基，则 E 的任何子空间也有.

c）如果两个空间 E_1 和 E_2 都有可数基，则它们的乘积 $E_1\times E_2$ 也有.

d）如果 E 有可数基，则 E 中存在处处稠可数子集.

e）任何紧距离空间有可数基.

f）$\mathbf{R}^n$ 有可数基.

89° 对 $\mathbf{R}^n$ 中原点为 O 的半直线集给出自然拓扑；对于包含 O 的直线集合考虑同样问题. 指出所得到的空间是紧的，且可距.

90° 我们以 E（相应地，E'）表示 Euclide 空间 $\mathbf{R}^2$ 的半径 $\geqslant 0$（相应地，>0）的圆集合.（任何平面上的圆因而由 E 的点来代表.）

a）指出，对于某种可明确的自然拓扑，E 同胚于 $\mathbf{R}^3$ 的闭半空间；在这一同胚下，E' 变为什么？

b）设 f 为 E 到 $\mathbf{R}^2$ 的映射，它使每个圆 C，联系它的中心 $f(C)$. 指出 f 连续. 又设 A 为 $\mathbf{R}^2$ 的闭子集. 对于圆心属于 A 的 E 的元素的集合，以及对应的圆周与 A 相交的 E 的元素的集合，我们能说些什么？

c）指出，E 的其圆周包含在 $\mathbf{R}^2$ 的紧集 K 中的元素集合是紧集；指出在这些元素中有一个半径达到最大值.

91° 指出，对于任何距离空间的 Cauchy 列 (a_n)，集合 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ 有界. 用例子指出，逆命题不正确；甚至可能存在这样的有界序列，其任何子列都不是 Cauchy 列.

92° 设 E 为距离空间，(a_n) 为 E 的 Cauchy 列，(b_n) 为 >0 的数列. 指出，存在给定的序列的子列 (a_{n_p})，使得对于任何 p，有 $d(a_{n_p}, a_{n_{p+1}})<b_p$.

93° 设 E, F 为两个距离空间，f 为 E 到 F 的双射. 指出，如果 F 完备，f 一致连续，且其逆连续，那末 E 也完备.

94° 设 (f_n) 为集合 E 到完备距离空间 F 的一致收敛的映射列，且 f 是 f_n 的极限.

指出，如果对于任何 n，$f_n(E)$ 是相对紧的，则 $f(E)$ 也是相对紧的.

95° 设 E 为完备距离空间；指出 E 的紧性判别准则之一为：对于任何 $\varepsilon>0$，存在用直径 $<\varepsilon$ 的集合覆盖 E 的有限覆盖.

96° 设 f 为距离空间 E 到距离空间 F 的连续映射，它在 E 的任何有界集上一致连续.

a）指出，对于 E 的任何 Cauchy 列 (a_n)，$(f(a_n))$ 是 F 的 Cauchy 列.

b）如果 $E\subset E'$，且 E 在 E' 中处处稠，而 F 完备，指出，f 能以唯一的方式延拓为 E' 到 F 的连续映射.

97° 指出，如果两个距离空间的乘积 $X\times Y$ 完备，那末 X 和 Y 都完备.

98° 设 E 为任意集合，F 为距离空间；指出，由 E 到 F 的有界映射组成的 $\mathscr{F}(E, F)$ 的子集 $\mathscr{B}(E, F)$ 在 $\mathscr{F}(E, F)$ 中既是开集又是闭集.

99° 指出，由 E 到 F 的常值映射组成的 $\mathscr{F}(E, F)$ 的子空间 F' 在 $\mathscr{F}(E, F)$ 中闭，且同构于 F.

100° 指出，对于任何集合 E，$\mathscr{B}(E, \mathbf{R})$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射 $u\to\sup u(x)$ 连续.

101° 设 E 为紧距离空间，F 为有可数基的距离空间．指出，$\mathscr{C}(E, F)$ 为有可数基的空间.

下面三个习题给出纲推理理论基础的几个陈述.

*102° 设 E 为完备距离空间，G_n 为 E 的开集列，其中每一个都在 E 上处处稠（$\bar{G}_n=E$）.

a）指出，集合 $G=\cap G_n$ 也是 E 的处处稠的开集的递减列的交.

b）由此导得 G 非空，更确切地说，G 在 E 上处处稠.

103° 设 E 为完备距离空间．由习题 102 可推得我们不能有：

$$E=\bigcup_n A_n,\quad \text{其中每个 } A_n \text{ 在 } E \text{ 中疏.}$$

104° 设 E 为完备距离空间．由习题 103 可推得，如果

$$E=\bigcup_n A_n,$$

其中每个 A_n 是闭集，则存在某个 A_n，其内部 $\mathring{A}_n$ 非空；更确切地说，开集 $G=\cup\mathring{A}_n$ 在 E 中处处稠.

105° 对于任何有理数 $x\in[0, 1[$，置 $x=p/q$，其中 p，q 为两个互质的整数．设 n 为 $\geqslant 3$ 的整数，$i(x)$ 是以 x 为中心、半长度为 $1/q^n$ 的 $\mathbf{R}$ 的开区间．置

$$G_n=\bigcup_x i(x).$$

a）指出，对于任何 n，$i(x)$ 的长度和 l_n 有限，且 $l_n\to 0$.

b）指出，$G=\cap G_n$ 包含不同于有理数的点．给出一个这种点的例子.

106° 设 E 为可数集，其中的点为 a_1，a_2，$\cdots$．置

$$d(a_p, a_p)=0,\quad d(a_p, a_q)=10+1/p+1/q,\quad \text{当 } p\neq q.$$

a) 指出，d 是距离，且被赋以这个距离的 E 是完备的.

b) 设 f 为 E 到 E 的映射，且满足 $f(a_p)=a_{p+1}$. 指出，f 使距离严格减小，但 f 没有任何不动点.

c) 把这个例子略加修正，构造完备距离空间 F 和 F 到自身的使距离严格减小的映射 f，它具有不动点 a，但对于任何 $x\neq a$，$f^{(n)}(x)$ 不趋向于 a.

*107° 设 E 为 $[0, 1]$ 到自身的任意映射的集合. 对于任何 $f_0\in E$，我们称任何集合 $V(f_0; \varepsilon; x_1, \cdots, x_n)$ 为中心是 f_0 的基本集合，这里 $V(f_0; \varepsilon; x_1, \cdots, x_n)$ 表示满足 $|f(x_i)-f_0(x_i)|<\varepsilon(i=1, 2, \cdots, n)$ 的 f 的集合，其中 ε 为 >0 的数，而 x_i 是 $[0, 1]$ 中的点.

我们称任何基本集合的并为 E 的"开集".

a) 验证，这些"开集"满足公理 O_1, O_2, O_3, O_4[1]，因而定义了 E 上的拓扑.

b) 如果我们称除了有限个点外，在 $[0, 1]$ 处处为零的函数 f 为简单函数，指出，简单函数集合在 E 上处处稠.

c) 指出，对于不可数个 x 的值不为零的函数 f 不可能是简单函数序列的极限.

d) 由此推得空间 E 上不可能定义任何距离，使得联系该距离的拓扑就是 E 的拓扑，换句话说，E 不可距.

e) 指出，任何简单函数是连续函数列的极限；在有理数上为 1，其他地方为 0 的函数 g 是简单函数列的极限，但 g 不是连续函数列的极限.

108° 设 $\mathscr{F}$ 为距离空间 E 上连续数值函数的一致等度连续族，f 为 $\mathscr{F}$ 的元素的上包络. 指出，如果 E 连通，则 f 处处有限或处处 $+\infty$；而当 f 有限时，则它一致连续.

*109° 设 $(f_i)_{i\in I}$ 为拓扑空间 E 上连续且 >0 的数值函数族，满足对于任何 $x\in E$，和 $f(x)=\sum_i f_i(x)$ 有限（在第七章 8-2 的意义下），而 f 连续.

指出，对于任何 $J\subset I$，函数 $f_J=\sum_{i\in J} f_i$ 连续，且 f_J 的族在任何点等度连续.

110° 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上的一致连续数值函数. 置

$$f_a(x)=f(x-a).$$

指出，函数 f_a 的集合在 $\mathbf{R}$ 上"一致等度连续". 由此推得在 $\mathbf{R}$ 的任何紧

1) O_4 指分离性公理，参看本章末的定义和公理. ——译者注

集 K 上，f_a 的振幅集有界.

111° 设 A 为距离空间 E 的非空子集，f 为 A 到 $\mathbb{R}$ 的比为 k 的 Lipschitz 映射. 对于任何 $x\in E$ 和任何 $y\in A$，置

$$f_y(x)=f(y)+kd(x, y).$$

指出，由

$$g(x)=\inf_{y\in A} f_y(x)$$

定义的 g 对于任何 x 有限，且为 k-Lipschitz 映射，而它在 A 上的限制恒同于 f.

112° 设 E 为紧距离空间，J 为被赋以一致收敛距离的 E 上的连续数值函数空间 C 的紧子集. 指出，对于任何 $\varepsilon>0$，存在具有下列性质的常数 $k>0$:

对于任何 $\alpha\in J$，存在 $\beta\in C$ 满足 $\|\alpha-\beta\|\leqslant\varepsilon$，而函数是比为 k 的 Lipschitz 函数.（应用上一习题，并取 A 为 E 的适当的有限子集.）

113° 设 f 为 $[0, 1]$ 上有有界变差的连续数值函数，$g(x)$ 为 f 在 $[0, x]$ 上的全变差.

指出，f 和 g（在直角坐标系中）的图象有同样长度. 再指出，由这两个图象绕 Oy 轴旋转产生的曲面有同样的面积；更确切地说，它们是"等距的"（通过一保持曲线长度的同胚）.

114° 置

$$f(x)=\sum_n 2^{-n}\sin(10^n x);$$

指出 f 在 $\mathbb{R}$ 的任何区间上的全变差为无限.

V. 第五章的法汉术语对照和索引(1)

(1) 表中的数字表示节和段的序号.

VI. 参考书目

Bourbaki, N., Topologie générale, ch. I, III, IV, IX, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris.

Dieudonné, J., Foundation of Modern Analysis, Academic Press, N. Y., 1960. (有中译本: 现代分析基础, 科学出版社, 1983).

Franklin, Philip, A Treatise on Advanced Calculus, John Wiley and Sons, N. Y., 1940.

Kelley, J. L., GeneralTopology, Van Nostrand Company, 1955.(有中译本: 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).

Kuratowski, C., Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie, Monographie n° 15 de l'Ens. Math., Genève; Topologie, I et II, Varsovie.

Newman, M. H. A., Elements of Topology of Plane Sets of Points, Cambridge, 1939.

Sierpinski, W., General Topology, Univ. of Toronto. Press, Toronto, 1952.

Whyburn, G. P., Analytic Topology, A. M. S. Colloquium Publications 28, New York.

VII. 定义和公理

拓扑空间的公理.

O_1: 空集和全空间是开集.

O_2: 任意有限个开集的交是开集.

O_3: 任意个开集的并是开集.

所谓闭集是指任何其余集为开集的集合.

闭集的性质.

F_1: 全空间和空集是闭集.

F_2: 任意有限个闭集的并是闭集.

F_3: 任意个闭集的交是闭集.

所谓空间 E 的点 x 的邻域是指 E 的任何包含含 x 的开集的

子集.

分离空间. 空间 E 称为分离的,是指它满足下列公理:

O_4: E 的两个不同点具有两个不相交的邻域.

空间的乘积. 如果 E_1, E_2 是两个拓扑空间,乘积拓扑空间 $E=E_1\times E_2$ 是取任何基本集合 $\omega_1\times\omega_2$ 的并作为集合 $E_1\times E_2$ 上的开集而得到的空间,这里 ω_i 是 E_i 的开集($i=1, 2$).

紧空间. 空间 E 称为紧的, 是指它分离, 且还满足开覆盖公理:

O_5: 从 E 的任何开覆盖可选出有限覆盖.

连通空间. 空间 E 称为连通的, 是指 E 和 $\varnothing$ 是仅有的同时是 E 的开集和闭集的子集.

拓扑群,拓扑环和拓扑体. 拓扑群是被赋有拓扑的群,对于该拓扑,函数(x^{-1})和(xTy)都连续.

拓扑环是赋有拓扑的环, 对于该拓扑, 函数($-x$), ($x+y$), ($x\cdot y$)都连续.

拓扑体: 除了对于拓扑环的同样条件外, 还有对于任何 $x\neq0$ 的 x^{-1} 的连续性.

距离空间. 距离空间是对它联系着距离 $d(x, y)$的集合 E,这里距离是定义在 E^2 上的数值函数,且满足:

M_1: $d(x, y)>0$, 当 $x\neq y$; $d(x, x)=0$.

M_2: $d(x, y)=d(y, x)$(对称性).

M_3: $d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(z, y)$(三角形不等式).

距离空间 E 称为完备的, 是指 E 的任何 Cauchy 列是收敛的.

VIII. 经典记号的回顾

记号 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 分别表示:

自然数集合$\{0, 1, 2, \cdots\}$,

正负整数的集合,

有理数集合,

实数集合,

复数集合.

记号 $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{R}_+$ 分别表示 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 中$\geqslant 0$ 的元素集合.

记号 $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ 分别表示从 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 中各自去掉它们的 0.

最后,$\overline{\mathbb{R}}$ 表示由 $\mathbb{R}$ 加上两个无限点而得到的集合$[-\infty, \infty]$.

第六章　数 值 函 数

我们将称任何E到完成直线$\overline{\mathbb{R}}=[-\infty, \infty]$的映射为$E$上的数值函数；到$\mathbb{R}$的映射则将称为有限数值函数，或者当上下文明确指出它们是有限时，也简单地称它们为数值函数．这些函数的集合将记作$\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$（相应地，$\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$）．

本章中我们将研究由$\mathbb{R}$是体和序集所引起的数值函数的特殊性质；特别是我们将研究某些$\mathbb{R}$的区间到$\mathbb{R}$的映射类．

I. 定义在任意集合上的数值函数

1. $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$和$\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$上的序关系

我们以$\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$（相应地，$\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$）表示$E$上的数值函数（相应地，有限数值函数）集合．

集合$\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$显然可被赋以代数结构．它同样也具有与其代数结构相容的序结构：

对于任何$f\in\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$，我们说$f$是正的，并记为$f\geqslant 0$，是指对于任何$x\in E$，$f(x)\geqslant 0$．

直接可得，如果$f\geqslant 0$，$g\geqslant 0$以及$\lambda\in\mathbb{R}_+$，则有

$$f+g\geqslant 0,\quad fg\geqslant 0,\quad \lambda f\geqslant 0.$$

更一般地，对于任何$f, g\in\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$，我们置

$$f\leqslant g,\ 是指\ g-f\geqslant 0.$$

（这等价于对于任何$x\in E$，有$f(x)\leqslant g(x)$）．直接可得，$\leqslant$是$\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$上的序关系（当$E$多于一点时，它不是全序关系）；可以验

证，对于任何 $f, g, h \in \mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ 和任何 $\lambda \in \mathbb{R}_+$，关系 $f \leqslant g$ 导致：

$$f+h \leqslant g+h; \quad \lambda f \leqslant \lambda g; \quad fh \leqslant gh \text{ 当 } h \geqslant 0.$$

同样可验证，由

$f \leqslant g$ 是指 $f(x) \leqslant g(x)$ 对于任何 $x \in E$ 成立所定义的 $\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$ 上的关系是序关系．然而容易注意到 $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ 的运算不能推广到 $\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$；特别是后者不是向量空间．

对于任何 $f \in \mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$，我们以 $|f|$ 表示对于任何 $x \in E$ 满足 $|f|(x) = |f(x)|$ 的函数．

我们显然有关系式：

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f|.$$

注 必须注意，关系式 $f \geqslant 0$ 并不导致或者 $f(x)=0$ 对于任何 x 成立，或者 $f(x)>0$ 对于任何 x 成立．

2. 数值函数的界

我们记得，$\overline{\mathbb{R}}$（对于序关系）同构于 $[0, 1]$；由此得可，$\overline{\mathbb{R}}$ 的任何非空子集在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中有上、下确界；于是我们可给出下列定义：

定义 2-1 对于任何 $f \in \mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$ 和任何 E 的非空子集 X，我们称 $f(X)$ 在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的上（相应地，下）确界为 f 在 X 上的上（相应地，下）确界．

我们记这两个界为 $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ 和 $\inf\limits_{x \in X} f(x)$．

$\overline{\mathbb{R}}$ 的子集的上、下确界的性质例如可导致：数 $a = \sup\limits_{x \in X} f(x)$ 可用下列性质来刻划：

1° 对于任何 $x \in X$，有 $f(x) \leqslant a$；

2° 对于任何 $b < a$，存在 $x \in X$，使得 $b < f(x)$．

当 f 在 X 上处处有限，则 f 在 X 上的振幅（参看第五章 §15）等于

$$\left(\sup_{x\in X} f(x)-\inf_{x\in X} f(x)\right).$$

当 f 在 X 上不是处处有限时，这个差将作为 f 在 X 上的振幅的定义，至少在这个差有意义时，即当 $f(X)$ 不退化点 $+\infty$ 或点 $-\infty$ 时可这样做.

定义 2-2 我们说 f 在 X 上有上界(相应地，有下界)是指它在 X 上的上(相应地，下)确界 $<+\infty$ (相应地，$>-\infty$).

我们说 f 在 X 上有界，是指它同时有上界和有下界.

直接可得，$\inf_{x\in X} f(x)=-\sup_{x\in X}(-f(x))$；这个关系式常常可用来只限于研究上确界.

f 在 X 上有界，这等价于：存在这样的 $a, b\in\mathbb{R}$，使得对于任何 $x\in X$，有 $a\leqslant f(x)\leqslant b$. 因此，如果 f 在 X 上有界，它也在 X 上有限；但是，相反，f 可以在 X 上有限，而并不有界：

$\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $x\to x^2$ 就是一个例子.

命题 2-3 设 (f_i) 为 $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ 的元素的有限族；则有：

$$\sup_{x\in X}\sum_i f_i(x)\leqslant\sum_i\sup_{x\in X} f_i(x).$$

而如果 $f_i\geqslant 0$，则有

$$\sup_{x\in X}\prod_i f_i(x)\leqslant\prod_i\sup_{x\in X} f_i(x).$$

比如我们证明第一个关系式；我们有

$$f_i(x)\leqslant\sup_{x\in X} f_i(x), \quad \text{故} \quad \sum_i f_i(x)\leqslant\sum_i\sup_{x\in X} f_i(x).$$

由此得到所求关系式.

3. 函数族的上包络和下包络

设 $(f_i)_{i\in I}$ 为集合 E 上的数值函数族. 为使数值函数 g 是这个族的上界，必需且只需对于任何 $x\in E$，有 $f_i(x)\leqslant g(x)$ 对任何

$i\in I$ 成立. 在这些 g 中存在一个比所有其他的都小的，即用 $f(x)=\sup\limits_{i\in I}f_i(x)$ 定义的函数 f；换句话说，序集 $\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$ 是完备格*).

定义 3-1 所谓族 $(f_i)_{i\in I}$ 的上包络，并记为 $\sup\limits_{i\in I} f_i$，是指函数 f，满足

$$f(x)=\sup_{i\in I}f_i(x)\quad 对于任何\ x\in E\ 成立.$$

同样可定义下包络 $\inf\limits_{i\in I}f_i$.

注 可以注意到函数的上确界与函数族的上包络这两个概念之间的相似性；这一相似性并非是偶然的，因为两个公式都代表完备格序集的上确界，前者是在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中，后者则是在 $\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$ 中.

例 1° 设 f_n 为 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $x\to\sin 2\pi nx$；族 $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 的上包络是这样的函数 f，它当 x 是无理数或等于形为 $p/4q$ 的不可约分数时，$f(x)=1$，而在其他地方 $f(x)\neq 1$.

2° 设 φ_A 是闭集 $A\subset\mathbb{R}$ 的特征函数. 这个函数是处处 $\geqslant\varphi_A$ 的连续函数的下包络.

解释 对于任何 $f\in\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$，设 $A(f)$ 为乘积空间 $E\times\overline{\mathbb{R}}$ 的位于 f 的图象之上的点集，换句话说，满足 $y\geqslant f(x)$ 的点 (x, y) 全体**).

给定了 $A(f)$ 等价于给定了 f. 直接可得，对于任何族 $(f_i)_{i\in I}$，有：

$$A(\sup_{i\in I}f_i)=\bigcap_i A(f_i).$$

---

*) 序集 A 称为完备格，是指 A 中任何有限集有界，而任何有上(下)界的子集必定有上(下)确界. 利用 $\sup\limits_{i\in I}(-f_i(x))=-\inf\limits_{i\in I}f_i(x)$，可知 $\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$ 的有下界子集必定也有下确界. ——译者注

**) 不少文献上，称这个点集 $A(f)$ 为f的上图 (epigraph) 并记作 epi f.——译者注

同样，当 I 有限时，有：

$$A(\inf_{i\in I} f_i)=\bigcup_i A(f_i).$$

当 I 无限时，后一关系式的左端仍包含右端，但不一定再恒等.

$\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ 中的上包络，一致有上界族. a) 如果 $(f_i)_{i\in I}$ 为有限数值函数的有限族，则其上包络还是有限的；但如果 I 无限，则它的上包络就可能不再有限；为了使它仍有限，必需且只需对于任何 x，数族 $(f_i(x))_{i\in I}$ 有上界.

b) 如果 $(f_i)_{i\in I}$ 是每一个都有上界的数值函数族，则这并不能保证 $\sup\limits_{i\in I} f_i$ 有上界.

例如任意的 E 到 $\mathbb{R}$ 的常值映射 $x\to n$ 的族 (f_n) 是由有界函数组成的，但其上包络不是有上界的.

当 $\sup\limits_{i\in I} f_i$ 有上界时，我们说族 $(f_i)_{i\in I}$ 一致有上界；这等于说，存在有限数 λ，使得对于任何 $i\in I$ 和任何 $x\in E$，有 $f_i(x)\leqslant\lambda$.

同样可定义一致有下界族. 一致有上、下界的族称为一致有界族.

f^+ 和 f^- 的定义 对于任何数值函数 f，置 $f^+=\sup(f, 0)$. 换句话说，f^+ 由关系式

$$f^+(x)=(f(x))^+ \quad \text{对任何 } x\in E \text{ 都成立}$$

来定义. 同样，置

$$f^-=\sup(-f, 0)=(-f)^+.$$

必须注意，我们总有 $f^+\geqslant 0$ 和 $f^-\geqslant 0$.

由对于实数的已知关系式：

$$a=a^+-a^-;\quad |a|=a^++a^-,$$

可得

$$f=f^+-f^-;\quad |f|=f^++f^-.$$

从而又有

$$f^+=\frac{1}{2}(|f|+f);\quad f^-=\frac{1}{2}(|f|-f).$$

更一般地，有

$$\sup(f,\ g)=\frac{1}{2}[(f+g)+|f-g|];$$

$$\inf(f,\ g)=\frac{1}{2}[(f+g)-|f-g|].$$

由此立刻可得：

$$\sup(f,\ g)+\inf(f,\ g)=f+g.$$

II. 数值函数的极限概念

对任何 $f\in\mathscr{F}(E,\ \mathbb{R})$ 和任何 $x\in E$，可联系 $\mathbb{R}$ 的元素 $f(x)$. 由于 $\mathbb{R}$ 是拓扑空间，对任何 E 的元素列或 $\mathscr{F}(E,\ \mathbb{R})$ 的元素列，以至更一般地对任何 E 上或 $\mathscr{F}(E,\ \mathbb{R})$ 上的滤子基，因而可联系极限元素.

我们将首先考察与 E 上的滤子基相联系的概念，然后再考察与 $\mathscr{F}(E,\ \mathbb{R})$ 上的滤子基相联系的概念.

4. 函数沿 E 上的滤子基的上、下极限

设 f 为 E 上的数值函数，$\mathscr{B}$ 为 E 上的滤子基. 我们已经在第五章第 8 节定义了 f 沿 $\mathscr{B}$ 的附着集，即集合

$$\bar{f}(\mathscr{B})=\bigcap_{B\in\mathscr{B}}\overline{f(B)}.$$

由于 $\overline{f(B)}$ 的族具有有限交性质(第五章 § 11)，且 $\mathbb{R}$ 紧，故 $\bar{f}(\mathscr{B})$ 非空. 此外，又由于 $\mathbb{R}$ 的任何非空子集有上确界，我们可以提出下列定义：

定义 4 1 所谓 f 沿滤子基 $\mathscr{B}$ 的上极限，是指集合 $\bar{f}(\mathscr{B})$ 的上确界. 记它为

$$\overline{\lim_{\mathscr{B}}} f \quad 或 \quad \lim_{\mathscr{B}} \sup f.$$

用同样方式也可定义下极限.

特殊情形 1° 设 (x_n) 为 E 的点列; 集合 $B_n=\{x_i;\ i\geqslant n\}$ 构成 E 上的滤子基 $\mathscr{B}$. f 沿 $\mathscr{B}$ 的上极限也称为序列 $(f(x_n))$ 的上极限.

2° 假设 E 被赋有拓扑; 设 A 为 E 的非空子集, $a\in\overline{A}$. 我们以 $\mathscr{B}$ 表示 E 的形为 $A\cap V$ 的子集集合, 这里 V 是 a 的邻域; 由于 $a\in\overline{A}$, 很明显, $\mathscr{B}$ 是滤子基.

我们用 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}}\sup f(x)$ 或当 $A=E$ 时, 用 $\lim\limits_{x\to a}\sup f(x)$ 来 $\lim\limits_{\mathscr{B}}\sup f$. 例如, 如果 $E=[\alpha,\ \beta]\subset\mathbb{R}$, $A=]\alpha,\ \beta]$, 而 $a=\alpha$*), 那末 $\lim\limits_{\mathscr{B}}\sup f$ 就称为 f 在点 a 上的右上极限.

3° 假设 E 是递增滤子序集, 即 E 的任何有限子集有上界; 又设 f 是 E 到 $\mathbb{R}$ 的递增映射.

如果 $\mathscr{B}$ 表示 E 的形为 $\{x;\ x\geqslant a\}_{a\in E}$ 的子集集合, 可以验证 $\mathscr{B}$ 是滤子基, 且

$$\lim_{\mathscr{B}} f=\lim_{\mathscr{B}}\sup f=\sup_{x\in E} f(x).$$

直接的性质 1° f 沿 $\mathscr{B}$ 的上极限属于 f 沿 $\mathscr{B}$ 的附着集.

2° $$\lim_{\mathscr{B}}\inf f=-\lim_{\mathscr{B}}\sup(-f).$$

引理 4-2 设 f 为集合 E 到紧空间 X 的映射; $\mathscr{B}$ 为 E 上的滤子基, $\bar{f}(\mathscr{B})$ 为 f 沿 $\mathscr{B}$ 的附着集.

那末对于任何满足 $\bar{f}(\mathscr{B})\subset\omega$ 的 X 的开集 ω, 存在 $B\in\mathscr{B}$, 使得 $\overline{f(B)}\subset\omega$.

事实上, 这些闭集 $\overline{f(B)}$ 在紧集 $C\omega$ 上的迹有交为 $\bar{f}(\mathscr{B})\cap C\omega=\phi$; 因此存在这些闭集的有限族 $(\overline{f(B_i)})$, 其交与 $C\omega$ 不交;

---

*) 原文遗漏 $a=\alpha$ 这一条件. ——译者注

而存在一个包含在 $\cap B_i$ 中的 $B\in\mathscr{B}$; 这就是所求的 B.

性质 4-3 如果 f 是 E 上的数值函数, 则 f 沿滤子基 $\mathscr{B}$ 收敛于 a 等价于

$$a=\limsup_{\mathscr{B}} f=\liminf_{\mathscr{B}} f, \text{ 或 } \{a\}=\bar{f}(\mathscr{B}).$$

事实上, 如果 $a=\lim\limits_{\mathscr{B}} f$, 则任何 a 在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的闭邻域 V 包含某个集合 $f(B)$, 从而也包含 $\overline{f(B)}$; 因此 $\bar{f}(\mathscr{B})\subset V$; 由此得到 $\bar{f}(\mathscr{B})=\{a\}$.

反之, 如果 $\{a\}=\bar{f}(\mathscr{B})$, 则对于任何 a 的邻域 V, 根据引理 4-2, 存在 $B\in\mathscr{B}$, 使得 $\overline{f(B)}\subset V$, 故 f 沿 $\mathscr{B}$ 收敛于 a.

命题 4-4 设 f 为拓扑空间 E 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的映射. 对于任何 $a\in E$, f 在点 a 的振幅(见第五章, 16-9) 为如下定义的 $\overline{\mathbb{R}_+}$ 的元素:

$$\omega(f, a)=\limsup_{x\to a} f(x)-\liminf_{x\to a} f(x)).$$

事实上, 等式两端都等于

$$\delta(f(V))=\sup f(V)-\inf f(V)$$

沿 a 的邻域 V 的滤子基的极限.

系 4-5 设 $f\in\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$, 其中 E 是拓扑空间. f 在 a 上连续等价于 f 在 a 上的振幅为零.

这是命题 4-3 的直接推论.

命题 4-6 设 $f, g\in\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$ 满足 $f\leqslant g$; $\mathscr{B}$ 为 E 上的滤子基; 那末有不等式:

$$\limsup_{\mathscr{B}} f\leqslant\limsup_{\mathscr{B}} g;\quad \liminf_{\mathscr{B}} f\leqslant\liminf_{\mathscr{B}} g.$$

事实上, 我们分别用 α 和 β 来表示第一个不等式的两端.

如果 $\beta=+\infty$, 则第一个关系式满足.

如果 $\beta<+\infty$, 引理 4-2 指出, 对于任何满足 $\beta<k$ 的 k, 存在 $B\in\mathscr{B}$, 满足 $g(B)<k$, 从而也有 $f(B)<k$, 以至 $\overline{f(B)}\leqslant k, \alpha\leqslant k$;

由于这个关系式对于任何 $k>\beta$ 成立，故就有 $\alpha\leqslant\beta$.

第二个不等式可由第一个不等式通过用 $(-g)$ 代替 f，用 $(-f)$ 代替 g 来得到.

系 4-7 如果 $f\leqslant g$，且 f, g 分别有沿 $\mathscr{B}$ 的极限 α 和 β，那末有 $\alpha\leqslant\beta$.

Z X 的紧性对于引理 4-2 的成立是本质的；同样，我们由此对于 $\overline{\mathbb{R}}$ 引出的推论不能推广到 $\mathbb{R}$：

例如，在 $\mathbb{R}$ 上，由

$$g(x)=1/x, \text{ 当 } x>0;\quad g(x)=0 \text{ 当 } x\leqslant 0$$

定义的有限数值函数 g 在点 0 只有 0 作为 $\mathbb{R}$ 中的附着值，尽管它在 0 上并不连续.

同样，如果我们用 f 表示 g 和 1 的下包络，则有 $f\leqslant g$，但是在 $\mathbb{R}$ 中 f 和 g 在点 0 的附着值集分别是 $\{0, 1\}$ 和 $\{0\}$.

5. 函数族的上、下极限

设 $(f_i)_{i\in I}$ 为 $\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$ 的元素族，$\mathscr{B}$ 为 I 上的滤子基.

对于任何 $x\in E$，I 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的映射 φ_x: $i\to f_i(x)$ 沿 $\mathscr{B}$ 有附着集 $\overline{\varphi}_x(\mathscr{B})$.

任何对于每个 $x\in E$ 满足 $f(x)\in\overline{\varphi}_x(\mathscr{B})$ 的 E 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的映射 f 称为族 (f_i) 沿 $\mathscr{B}$ 的附着值.

这些附着值的集合包含其上、下确界，它们无非就是映射

$$x\to\liminf_{\mathscr{B}} f_i(x) \quad \text{和} \quad x\to\limsup_{\mathscr{B}} f_i(x).$$

我们将记它们为 $\liminf_{\mathscr{B}}(f_i)$ 和 $\limsup_{\mathscr{B}}(f_i)$.

命题 5-1 设 $(f_i)_{i\in I}$ 和 $(g_i)_{i\in I}$ 为 $\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$ 的两个元素族；又设 $\mathscr{B}$ 为 I 上的滤子基.

如果对于任何 $i\in I$，有 $f_i\leqslant g_i$，那末也有

$$\limsup_{\mathscr{B}}(f_i) \leqslant \limsup_{\mathscr{B}}(g_i); \quad \liminf_{\mathscr{B}}(f_i) \leqslant \liminf_{\mathscr{B}}(g_i)。$$

事实上，对于任何 $x \in E$，对 φ_x 应用命题 4-6 指出，例如有

$$\limsup_{\mathscr{B}} f_i(x) \leqslant \limsup_{\mathscr{B}} g_i(x).$$

1° 如果对于任何 i 有 $f_i < g_i$，即对于任何 i 和任何 x 有 $f_i(x) < g_i(x)$，则对这个严格不等式并不能取极限，即一般我们没有：

$$\limsup_{\mathscr{B}} f_i < \limsup_{\mathscr{B}} g_i$$

2° 一般不存在序列 (f_n) 的收敛子列 (f_{n_p})，使得其极限等于 $\limsup(f_n)$. 为了看到这点，只需对任何 $x \in \mathbf{R}$，置 $f_n(x) = (-1)^n x$.

6. 在连续函数上的运算

命题 6-1 设 E 为拓扑空间，$a \in E$。$\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ 的由在 a 上连续的函数所组成的子集 A 是 $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ 在子代数格*).

事实上，由 $\mathbb{R}$ 上的加法和乘法的连续性可得，如果 f 和 g 在 a 上连续，则 $(f+g)$，fg 以及对于任何纯量 λ 的 λf 也都在 a 上连续. 另一方面，$\mathbf{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $\varphi: u \to |u|$ 连续，因而对于任何 $f \in A$，$|f| = \varphi \circ f$ 也在 A 上连续. 于是更一般地，关系式

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}[(f+g) + |f-g|]$$

指出，如果 $f, g \in A$，则也有 $\sup(f, g) \in A$，这个结论显然可推广到任何 A 的元素的有限族的上、下包络.

---

*) 序集 A 称为格，是指它的任何有限元素族有上、下确界. 如果它同时还是($\mathbf{R}$ 上的)向量空间，且满足 i) $\forall x, y, z \in A$, $x \leqslant y \Rightarrow x+z \leqslant y+z$; ii) $\forall x, y \in A$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}_+$, $x \leqslant y \Rightarrow \lambda x \leqslant \lambda y$，那末 A 称为向量格. 如果向量格 A 同时还是代数(即它同时还是与向量空间运算相容的环)，且满足 iii) $\forall x, y \in A$, $\{0 \leqslant x, 0 \leqslant y\} \Rightarrow 0 \leqslant xy$，那末 A 称为代数格. 不难验证，$\mathscr{F}(E, \mathbf{R})$ 对于通常的代数运算与序关系形成代数格. ——译者注

命题 6-2 设 E 为距离空间，U（相应地，L）为由 E 上的一致连续（相应地，Lipschitz）函数组成的 $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ 的子集.

那末 U 和 L 为 $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ 的两个子向量格.

证明，可照搬上一命题的证明，并注意到 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $(u, v) \to (u+v)$ 和 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $u \to |u|$ 都是 Lipschitz 映射（因而也是一致连续的）.

Z 认为 U 和 L 关于乘法稳定是不正确的. 例如数值函数 $x \to x$ 属于 U 和 L，但它的平方 $x \to x^2$ 并不属于它们.

命题 6-3 设 $(f_i)_{i \in I}$ 为 $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ 的任意元素族，f 为它的上包络.

如果每个 f_i 是比为 k 的 Lipschitz 映射，且 f 至少在一点上有限，那末 f 处处有限，且也是比为 k 的 Lipschitz 映射.

事实上，对于任何 $x, y \in E$，由假设，有

$$f_i(y) \leqslant kd(x, y) + f_i(x)$$

因而也有

$$f(y) \leqslant kd(x, y) + f(x).$$

这样，如果 $f(x) < \infty$，则也有 $f(y) < \infty$，以至 $f(y)$ 有限. 于是我们可以对于任何 $x, y \in E$，记

$$f(y) - f(x) \leqslant kd(x, y), \quad \text{同样也有} \quad f(x) - f(y) \leqslant kd(x, y).$$

因此，f 就是比为 k 的 Lipschitz 映射.

对于下包络显然也有类似的陈述.

例 设 E 为距离空间，$A \subset E$.

对于任何 $x \in E$，置

$$f(x) = \sup_{a \in A} d(x, a); \quad g(x) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

每个函数 $x \to d(x, a)$ 都是比为 1 的 Lipschitz 映射；因而 g 是比为 1 的 Lipschitz 映射，而当 f 在某点上有限时（它等价于 A 有界），f 处处有限，且也是比为 1 的 Lipschitz 映射.

Z 不能错误地认为一致连续函数的上或下包络还是一致连续的. 它甚至可能是不连续的, 例如, [0, 1] 上的函数 $1/(1+x^2)^n$ 的族就有不连续的下包络. 为了再得到这种类型的陈述, 必须假设族 (f_i) 有补充性质, 例如一致等度连续性.

下一节中我们将看到, 连续函数族的上或下包络, 尽管不一定连续, 仍具有引人注目的性质.

III. 半连续数值函数

设 f 为定义在拓扑空间 E 中的数值函数. f 在 $a\in E$ 上连续等价于下列两条件都实现:

1° 对于任何 $\lambda<f(a)$, 存在 a 的邻域 V, 满足 $\lambda<f(V)$.

2° 对于任何 $\lambda>f(a)$, 存在 a 的邻域 V, 满足 $\lambda>f(V)$.

当我们只抽出这两个条件之一, 就导致半连续的概念.

7. 点上的半连续性

定义 7-1 设 E 为拓扑空间, $f\in\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$. 我们说 f 在 E 的点 a 上下半连续, 是指对于任何 $\lambda<f(a)$, 存在 a 的邻域 V, 满足 $\lambda<f(V)$.

当这个条件对于 E 的任何点 a 都实现, 我们说 f 在 E 上下半连续.

上半连续的定义由不等号变向而得到.

直接可得, f 在 a 上的下半连续性等价于 $-f$ 在同一点上的上半连续性. 注意到这点可使我们仅对下半连续函数来表述我们的大部分讨论.

例 1° 设 f_n 为 $\overline{\mathbb{R}}$ 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的映射, 满足 $f_n(0)=0$, $f_n(x)=x^{-n}$, 当 $x\neq0$.

对于任何偶整数 n, f_n 在点 0 下半连续.

对于任何奇整数 n, f_n 在点 0 既非下半连续, 也非上半连续.

2° 设 f 为 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射, 当 x 是无理数时, $f(x)=0$, 而当 x 为有理数时, $f(x)=1$.

函数 f 在任何有理点上下半连续, 而在任何无理点上上半连续.

命题 7-2 f 在 a 上下半连续等价于

$$f(a)=\liminf_{x\to a} f(x)^{*)}.$$

证明 a) 假设 f 在 a 上下半连续, 并设 $\lambda<f(a)$. 于是存在 a 的邻域 V, 满足 $\lambda\leqslant f(V)$; 这样也有:

$$\lambda\leqslant\overline{f(V)},\ \text{故}\quad \lambda\leqslant\liminf_{x\to a} f(x).$$

由于这个关系式对于任何 $\lambda<f(a)$ 都成立, 我们也有

$$f(a)\leqslant\liminf_{x\to a} f(x).$$

但相反的不等式也成立, 因为对于任何 V, $f(a)\in f(V)$; 故所求等式成立.

b) 反之, 假设 $f(a)=\liminf\limits_{x\to a} f(x)$. 对于任何 $\lambda<f(a)$, 由引理 4-2, 存在 a 的邻域 V, 满足 $\lambda<f(V)$. 这就是说 f 在 a 上下半连续.

命题 7-3 在 a 上下半连续、且 $>-\infty$ 的函数集合 $\mathscr{I}(a)$ 对于加法是稳定的.

事实上, 设 $f, g\in\mathscr{I}(a)$, $\lambda<f(a)+g(a)$. 我们可以记 $\lambda=\alpha+\beta$, 其中 $\alpha<f(a)$, $\beta<g(a)$. 于是存在 a 的邻域 U, 使得 $\alpha<f(U)$, 以及 a 的邻域 V, 使得 $\beta<g(V)$. 这样也有:

---

*) 不少文献中这个等式被代替为不等式 $f(a)\leqslant\liminf\limits_{x\to a} f(x)$. 这主要是对下极限的理解不同而引起的. 如果把下极限理解为 $\liminf\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$, 那末这里必须用不等式. ——译者注

$$\lambda=\alpha+\beta<(f+g)(x)\ \text{对于任何}\ x\in U\cap V\ \text{成立}.$$

这就证明了 $f+g\in\mathscr{I}(a)$.

系 7-4 由在 a 上下半连续的函数组成的 $\mathscr{F}(E,\ \overline{\mathbb{R}})$ 的子集是凸锥*).

为了研究意义大得多的全空间上的半连续性，我们就在这里停止对点上的半连续性的讨论.

8. 全空间上的下半连续函数

为了使空间 E 到空间 F 的映射 f 在 E 上连续，必需且只需 F 的任何闭集通过 f 的逆象是 E 的闭集. 我们将看到半连续函数有一个类似的特征.

命题 8-1 空间 E 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的映射 f 在 E 上下半连续等价于对于任何 $\lambda\in\overline{\mathbb{R}}$，满足 $f(x)\leqslant\lambda$ 的 x 的集合是闭集(这也等于说，满足 $\lambda<f(x)$ 的 x 的集合是开集).

事实上，f 在点 a 上的下半连续性等价于对于任何 $\lambda<f(a)$，满足 $\lambda<f(x)$ 的 x 的集合是 a 的邻域；换句话说，f 在全空间上的下半连续性，等价于对于任何 λ，满足 $\lambda<f(x)$ 的 x 的集合是其每个点的邻域，因而是开集.

系 8-2 设 φ_A 是 E 的子集 A 的特征函数. φ_A 下半连续等价于 A 是开的.

事实上，满足 $\lambda<\varphi_A(x)$ 的 x 的集合当 $\lambda\geqslant1$ 时是 ϕ，而当 $\lambda<1$ 时是 A.

同样，φ_A 上半连续等价于 A 是闭的.

下半连续性的几何解释 在 $n^\circ 3$-2 中，我们已经把任何 E 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的映射与乘积空间 $E\times\overline{\mathbb{R}}$ 的子集 $A(f)$ 相联系.

我们将用 $A(f)$ 来简单地解释下半连续性(见图 6).

---

*) 凸锥的定义见 119 页译者注.——译者注

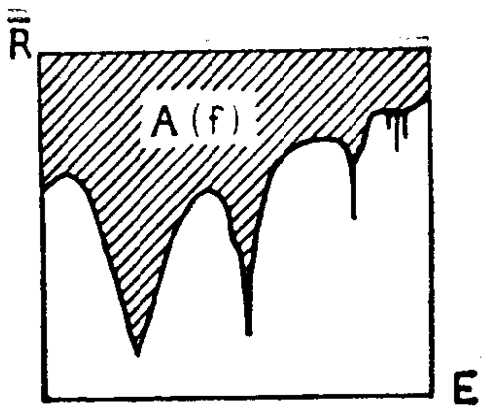


图 6

命题 8-3 拓扑空间 E 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的映射 f 下半连续等价于 $A(f)$ 在 $E\times\overline{\mathbb{R}}$ 中闭.

证明 $A(f)$ 闭等价于它的余集是开集，或者说这个余集 $CA(f)$ 是它的每个点的邻域.

f 在 E 上下半连续等价于对于任何满足 $\lambda<f(a)$ 的偶 (a, λ)（即对于任何 $(a, \lambda)\in CA(f)$）和对于任何满足 $\lambda<\mu<f(a)$ 的 μ，满足 $\mu<f(x)$ 的 x 的集合是 a 的邻域 V. 换句话说，这等价于存在 (a, λ) 的邻域（即 $V\times[-\infty, \mu[$）包含在 $CA(f)$ 中.

所述的等价性因而得证.

半连续函数的运算 命题 7-3 对我们指出，下半连续函数类对于加法是稳定的；我们将看到它也对另一些运算稳定.

命题 8-4 设 f 为空间 E 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的区间 $[\alpha, \beta]$ 的下半连续映射，φ 为 $[\alpha, \beta]$ 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的递增连续映射，那末复合函数 $g=\varphi\circ f$ 是下半连续的.

这是命题 8-1 的直接推论；因为对于任何 λ，$\varphi^{-1}([-\infty, \lambda])$ 有形式为 $([\alpha, \mu])$；而 $f^{-1}([\alpha, \mu])$ 是闭的，因为这个集合恒同于 $f^{-1}([-\infty, \mu])$. 可是这个集合无非就是 $g^{-1}([-\infty, \lambda])$，故命题成立.

系 8-5 如果 f 和 g 都 >0，且在 E 上下半连续，那末 fg 也

下半连续.

事实上只需逐次取 φ 为对数函数和指数函数，来应用命题 8-4.

$\operatorname{Log} f$ 和 $\operatorname{Log} g$ 都 $>-\infty$，且下半连续；故 $\operatorname{Log} fg=(\operatorname{Log} f+\operatorname{Log} g)$，以至 fg 也是如此.

定理 8-6 任何下半连续数值函数族 $(f_i)_{i\in I}$ 的上包络也是下半连续的.

任何下半连续数值函数的有限族的下包络也是下半连续的.

这是命题 8-3 和 $n°3$-2 的公式的直接推论.

事实上，如果每个 $A(f_i)$ 是闭集，$\cap A(f_i)$ 也是闭集，从而 $\sup(f_i)$ 下半连续. 同样，如果 I 有限，$\cup A(f_i)$ 为闭集，从而 $\inf\limits_i f_i$ 下半连续.

特殊情形 任何连续函数族的上包络是下半连续的.

更特殊的是，如果 f_n 是连续数值函数的递增列，则它的极限 f 恒同于 $\sup f_n$，因而 f 是下半连续的. 这一性质的逆命题在习题 9 和 10 中研究.

对于上半连续性我们有类似的陈述，只需把上、下包络互相代替即可.

Z 定理 8-6 不能推广到任何下半连续函数的无限族的下包络.

事实上，设 f 为 E 上的任意数值函数. 它是如下定义的函数 f_a 的下包络：

$$f_a(x)=+\infty \quad \text{当 } x\neq a;\quad f_a(a)=f(a).$$

而直接可得，每个函数 f_a 是下半连续的.

9. 下半连续函数的构造

半连续函数至少象连续函数一样接近于我们的感觉经验. 下

面的例子能帮助我们理解.

当我们观察一个不透明的物体时，在从眼睛开始的任一半直线上，我们只能察觉此物体的一个点；由该点到我们的眼睛的距离是该半直线方向的函数；这个函数不是连续的，而是下半连续的，只要我们认为所观察的物体是闭集.

这个例子经过适当推广，还可用来提供最一般的下半连续函数.

事实上，当 E 为拓扑空间时，设 A 为 $E\times\overline{\mathbb{R}}$ 的闭集. 对于任何 $x\in E$，设 $f_A(x)$ 为横坐标是 x 的 A 的点的纵坐标的下确界(如果这样的点没有，则取 $+\infty$).

不难指出，这样定义的函数 f_A 是下半连续的. 反之，由命题 8-3，任何 E 上的下半连续函数可以由这一程序得到.

例 设 g 为拓扑空间 E 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的任意映射；Γ 为 g 的图象，集合 $\overline{\Gamma}$ 是 $E\times\overline{\mathbb{R}}$ 的闭子集. 与 $\overline{\Gamma}$ 相联系的通过上述程序得到的 $f_{\overline{\Gamma}}$ 是下半连续的；不难验证，对于任何 $x\in E$，有

$$f_{\overline{\Gamma}}(x)=\liminf_{t\to x} g(t).$$

同样，函数 $\limsup\limits_{t\to x} g(t)$ 是上半连续的. 它们的差 $\omega(f, x)$ 因而也是上半连续的.

10. 紧空间上的半连续函数

定理 10-1 对于任何紧空间 E 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的下半连续映射 f，至少存在 E 的一个点 a，满足

$$f(a)=\inf_{x\in E} f(x).$$

事实上，置
$$m=\inf_{x\in E} f(x).$$

对于任何 $\lambda>m$，满足 $f(x)\leqslant\lambda$ 的 x 集合 E_λ 是闭集，且非空.

另一方面，E_λ 的族按包含关系是全序的，因为 E_λ 是 λ 的递增函数；因此（第五章命题 11-4），E_λ 的交非空．在这个交的任何点 a 上，对于任何 $\lambda > m$，有 $f(a) \leqslant \lambda$，故 $f(a) \leqslant m$.

另一方面由 m 的定义，有 $f \geqslant m$，因此 $f(a) = m$.

系 10-2　紧空间 E 到 $]-\infty, +\infty]$ 的任何下半连续映射 f 在 E 中有下界.

事实上，我们有 $m = f(a) > -\infty$，故 $f \geqslant f(a) > -\infty$.

对于上半连续函数，我们有类似的陈述.

如果我们把这些结果应用到连续函数上，我们又重新发现以前肯定过的结论：紧空间上的连续函数在其上达到上、下确界.

现在我们将研究这些结果在变分学上的重要应用.

11．长度的半连续性

曲线的长度是这一曲线的函数；在某种我们将要明确的意义下，当它连续变化时，我们可能认为它的长度也连续变化．事实上并非如此，正如下列初等的例子所指出的那样：

设 C_n 为方程 $y = n^{-1}\sin nx$ 所决定的平面曲线，其中 $0 \leqslant x \leqslant \pi$，$n \in \mathbb{N}^*$（在直角坐标系中）.

直接可得，所有这些曲线有同样长度，而它是一个数 $l > \pi$．但当 $n \to +\infty$ 时，这些曲线一致收敛于线段 $[0, \pi]$．因此，这一一致收敛性并不带来长度的收敛性.

我们可以修正这个例子，把 l 换为不管怎样的 $\geqslant \pi$ 的数．但是值得注意的是，我们不可能把 l 换为 $< \pi$ 的数.

换句话说，收敛于线段 $[0, \pi]$ 的曲线长度的下极限不小于 π．这无非就是我们现在将进一步明确的下半连续性.

参数化曲线的空间　设 T 为 $\mathbb{R}$ 的紧空间，E 为距离空间．根据以前的定义（第五章 § 24），任何 T 到 E 的连续映射都定义了一

条参数化曲线. 因此我们可以把 T 到 E 的连续映射集合 $\mathscr{C}(T,E)$ 看作定义在 T 上的 E 的参数化曲线集合.

我们把联系一致收敛距离的拓扑作为 $\mathscr{C}(T, E)$ 上的拓扑, 这里距离定义为

$$d(f, g)=\sup_{t\in T} d(f(t), g(t)).$$

对于任何 $t\in\mathscr{C}(T, E)$, 我们以 $L(f)$ 表示用 f 定义的曲线长度. 这样我们就有了一个定义在拓扑空间 $\mathscr{C}(T, E)$ 上的数值函数.

定理 11–1 长度 $L(f)$ 是 $\mathscr{C}(T, E)$ 中的 f 的下半连续函数.

证明 对于 T 的任何有限子集 $\sigma=\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$, 其中 $t_1<t_2<\cdots<t_n$, 以及对于任何 $f\in\mathscr{C}(T, E)$, 置

$$V_\sigma(f)=\sum_i d(f(t_i), f(t_{i+1})).$$

对于任何 $a\in T$, $\mathscr{C}(T, E)$ 到 E 的映射 $f\to f(a)$ 是连续的, 故对于任何 σ, 映射 $f\to V_\sigma(f)$ 连续.

既然 $L(f)=\sup_\sigma V_\sigma(f)$ (参看第五章 $n^\circ 24$), 故 L 是连续函数 V_σ 的上包络; 由定理 8–6, 它因而是下半连续的.

系 11–2 $\mathscr{C}(T, \mathbb{R})$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $f\to(f$ 的全变差$)$ 是下半连续的.

变分学上的应用 单变量变分学问题在于在给定的曲线集合中寻求一条曲线, 使它的长度尽可能最短.

这个问题的解由下列对照定理 10–1 和 11–1 而得到的引理来提供.

引理 11–3 对于任何 $\mathscr{C}(T, E)$ 的紧集 K, 存在 K 的元素 f_0, 满足

$$L(f_0)=\inf_{f\in K} L(f).$$

因此, 我们就被引向研究 $\mathscr{C}(T, E)$ 的紧集.

引理 11-4 设 T 为区间 $[a, b]$，其中 $a<b$.

对于满足 $L(f)<l$ 的任何 $f\in\mathscr{C}(T, E)$，存在 $[0, 1]$ 到 $[a, b]$ 上的递增同胚 α，使得 $f\circ\alpha$ 是比为 l 的 Lipschitz 映射.

证明 对于任何 $x\in[a, b]$，设 $V(x)$ 为 f 在 $[a, x]$ 上的全变差；然后，置：

$$\beta(x)=k_1V(x)+k_2(x-a).$$

可以验证，当 $k_1=l^{-1}$，$k_2=(l-L(f))/(b-a)l$ 时，映射 β 是 $[a, b]$ 到 $[0, 1]$ 上的递增同胚. 我们以 α 表示逆映射 β^{-1}.

由于代换递增变量并不改变全变差(第五章，命题 24-5)，所以对于任何满足 $x<y$ 的 $x, y\in[0, 1]$，有

$$\begin{aligned}|f\circ\alpha(y)-f\circ\alpha(x)|&\leqslant f\circ\alpha \text{ 在 } [x, y] \text{ 上的全变差}\\ &=f \text{ 在 } [\alpha(x), \alpha(y)] \text{ 上的全变差}\\ &=V(\alpha(y))-V(\alpha(x))\leqslant l(\beta(\alpha(y))-\beta(\alpha(x)))\\ &=l(y-x).\end{aligned}$$

不等式 $|f\circ\alpha(y)-f\circ\alpha(x)|\leqslant l(y-x)$ 建立了所述性质.

系 11-5 对于任何 E 的长度 $<l$ 的参数化曲线族 $(C_i)_{i\in I}$，存在属于 $\mathscr{C}([0, 1], E)$ 的参数化曲线族 $(C_i')_{i\in I}$，使得对于任何 $i\in I$，C_i 和 C_i' 对于变量代换是等价的，且 C_i' 是比为 l 的 Lipschitz 映射.

现在我们能够应用这些结果来研究距离空间中的测地线(所谓 E 的测地线是指长度 $\leqslant$ 任何有同样端点的弧的长度的简单可度长的弧).

定理 11-6 设 E 为紧距离空间，A, B 为 E 的两个不相交闭子集.

如果 E 中存在端点分别在 A, B 中的可度长曲线，且 k 表示它们的长度的下确界，那末也存在端点分别在 A, B 中的长度为 k 的简单弧.

事实上，我们以 l 表示满足 $k<l$ 的任意有限数. 设 K 为 $\mathscr{C}([0,1],E)$ 的由满足 $f(0)\in A$, $f(1)\in B$ 的比为 l 的 Lipschitz 映射 f 所组成的子集. 这个集合是一致等度连续的，且在 $\mathscr{C}([0,1],E)$ 中闭；因此根据 Ascoli 定理(第五章，§ 23)，它是紧的.

系 11-5 指出，$k=\inf\limits_{f\in K} L(f)$；故由引理 11-3，存在 $f_0\in K$，满足

$$L(f_0)=\inf_{f\in K} L(f)=k.$$

这个映射 f_0 不一定是双射，但是利用通过 $[0,k]$ 确定的内在参数化可以消除这一不足：

对于任何 $t\in[0,1]$，设 $\varphi(t)$ 为 f_0 在 $[0,t]$ 上的全变差. 对于任何 t_1, $t_2\in[0,1]$，我们有

$$d(f_0(t_1),f_0(t_2))\leqslant|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|. \tag{1}$$

于是关系式 $(\varphi(t_1)=\varphi(t_2))$ 导致 $(f_0(t_1)=f_0(t_2))$，这就指出 f_0 是 φ 的函数，即 f_0 有形式为 $g\circ\varphi$. 不等式(1)因而可写成

$$d(g(u_1),g(u_2))\leqslant|u_1-u_2|, \quad 其中 \quad u_1=\varphi(t_1),\ u_2=\varphi(t_2).$$

这样映射 g 是 $[0,k]$ 上的比为 1 的 Lipschitz 映射；我们称 g 为联系 f_0 的*内在参数化*.

g 的全变差 $\leqslant k$，但由于有：

$$g(0)=f_0(0)\in A,\quad g(k)=f_0(1)\in B,$$

g 的全变差又必须 $\geqslant k$；故它恰好等于 k，且 g 在任何区间 $[u_1,u_2]$ 上的全变差为 (u_2-u_1).

我们说 g 是双射；事实上如果存在 u_1, u_2 满足 $u_1<u_2$，且 $g(u_1)=g(u_2)$，我们从曲线中去掉对应区间 $]u_1,u_2[$ 的弧，仍得到端点在 A, B 中的曲线，而其长度将是

$$k-(u_2-u_1)<k.$$

而这与 k 的定义矛盾.

例 设 Δ 为 $\mathbb{R}^2$ 的闭圆盘 $x^2+y^2\leqslant r^2$；f 为 Δ 到 $\mathbb{R}$ 的连续映

射，而 E 为 f 的图象. $\mathbb{R}^3$ 的距离子空间 E 为 Δ 的连续象*⁾，故是紧的.

如果映射 f 是 Lipschitz 映射，E 的任意两点 p 和 q 可通过一条 E 的可度长弧，即连接 p 和 q 在 Δ 上投影的直线段的象.

因此，根据定理 11-6，通过 p 和 q 有一条 E 的测地线.

我们称 Δ 的内部的象为 E 的内部，圆 $x^2+y^2=r^2$ 的象为 E 的边界，并以 0 表示 Δ 的中心的象.

连接 0 与边界上的一点的 E 的弧长有下确界 $\geqslant r$；另一方面，连接 0 与 q 的测地线长度随 q 趋向于 0 而趋向于 0. 由此得到，如果 q 在 0 的适当的邻域内取，任何连结 0 和 q 的测地线在 E 的内部. 因此，可以陈述:

命题 11-7 如果 p 是 $\mathbb{R}^3$ 中形为 $z=f(x, y)$ 的开 Lipschitz 曲面 S 中的一点，那末对于任何 S 的充分靠近 p 的点 q，存在 S 的端点为 p 和 q 的测地线.

IV. Stone-Weierstrass 定理(§12)

我们将在这里建立若干定理，它们将向我们指出，如果一个紧空间上的连续函数族足够丰富，且对于某些运算稳定，那末它们可用来一致逼近于这个空间中的任何连续函数.

设 X 为紧空间，$\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ 为 X 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数代数，并被赋以一致收敛拓扑.

我们说，$\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ 的子集 A 是格，是指对于任何 $f, g\in A$，包络 $\sup(f, g)$ 和 $\inf(f, g)$ 也属于 A.

引理 12-1 设 A 为 $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ 的格子集.

---

*⁾ 原文作"同胚"，但这是要证明的.——译者注

函数 $f\in\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ 属于 A 的闭包 $\overline{A}$，这等价于：对于任何 x, $y\in K$ 和任何 $\varepsilon>0$，存在依赖于 x, y 的 $g\in A$，使得

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon,\quad |f(y)-g(y)|<\varepsilon.$$

为了强调这个 g 依赖 x 和 y，我们记它为 $g_{x,y}$.

证明 固定 ε. 采用所述记号，我们有

$$|f(x)-g_{x,y}(x)|<\varepsilon;\quad (1)\qquad |f(y)-g_{x,y}(y)|<\varepsilon.\quad (2)$$

置 $$\omega_{x,y}=\{z:g_{x,y}(z)<f(z)+\varepsilon\}.$$

由于函数 $(g_{x,y}-f)$ 连续，集合 $\omega_{x,y}$ 是开的；且根据关系式(2)，它包含 y；因此对于固定的 x, $\omega_{x,y}$ 全体构成 X 的开覆盖；由这一覆盖可选出有限覆盖 (ω_{x,y_i}).

置 $$g_x=\inf_i(g_{x,y_i});$$

我们有 $$g_x<f+\varepsilon\quad \text{在 } X \text{ 中成立,}$$

且 $$g_x(x)>f(x)-\varepsilon.$$

置 $$\omega_x=\{z:g_x(z)>f(z)-\varepsilon\}.$$

由于函数 (g_x-f) 连续，集合 ω_x 是开的，且它包含 x；因此 ω_x 组成 X 的开覆盖；由这一覆盖可选出有限覆盖 (ω_{x_j}).

置 $$g=\sup_j(g_{x_j});$$

我们有：$$g\in A;\quad g<f+\varepsilon\quad \text{以及}\quad g>f-\varepsilon.$$

这就求得 $g\in A$，它以 ε 的精度逼近 f.

例 设 X 为 $\mathbb{R}$ 的区间 $[a,b]$，A 为 X 上的按段仿射的连续函数 f 全体(这就是说，存在 X 的由区间组成的有限覆盖，在此每个区间上，f 是仿射函数). 这一集合 A 显然是格，且对于任何 x, y，存在 $f\in A$，它在 x, y 上取任意给定的值.

因此 $$\overline{A}=\mathscr{C}(X,\mathbb{R}).$$

当 X 为 $\mathbb{R}^n$ 的紧集，A 为 $\mathbb{R}^n$ 中的按段仿射的连续函数 f（即 f 有形式为：$f=\sup(g_1,g_2,\cdots,g_p)-\sup(h_1,h_2,\cdots,h_q)$，其中

g_i 和 h_i 在 $\mathbb{R}^n$ 中仿射)在 X 上的迹的集合，我们有类似的结果。

引理 12-2 任何 $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ 的闭子代数是格。

证明 根据关系式：

$$\sup(f, g)=\frac{1}{2}[(f+g)+|f-g|];$$

$$\inf(f, g)=\frac{1}{2}[(f+g)-|f-g|],$$

只需证明，当 $f\in A$ 时，也有 $|f|\in A$。

为此将指出 $|f|$ 是形为 $\sum_1^n a_p f^p$ 的 f 的多项式的一致极限；很明显，我们可只限于 $\|f\|\leqslant 1$ 的情形。

对于任何 $\varepsilon>0$，我们有：

$$0\leqslant (x^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}-|x|\leqslant\varepsilon.$$

另一方面：$x^2+\varepsilon^2=1+\varepsilon^2+(x^2-1)=(1+\varepsilon^2)(1+u)$，

$$\text{其中 } u=(x^2-1)/(1+\varepsilon^2).$$

对于任何 $x\in[-1, 1]$，有

$$|u|\leqslant(1+\varepsilon^2)^{-1}<1,$$

故 $(1+u)^{\frac{1}{2}}$ 的 Taylor 级数*)当 $x\in[-1, 1]$ 时一致收敛于 $(1+u)^{\frac{1}{2}}$；因此存在多项式 $p(x)$，满足

$$|(x^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}-p(x)|\leqslant\varepsilon \quad \text{对于任何 } x\in[-1, 1] \text{成立.}$$

特别是因而有 $|p(0)|\leqslant 2\varepsilon$；这样，如果我们最后置 $Q=p-p(0)$，则有：

$$\big|Q(x)-|x|\big|\leqslant\varepsilon+2\varepsilon+\varepsilon=4\varepsilon \quad \text{对于任何 } x\in[-1, 1] \text{成立.}$$

因为 Q 没有常数项，故 $Q(f)\in A$；同时由假设 $\|f\|\leqslant 1$，我们有

$$\|Q(f)-|f|\|\leqslant 4\varepsilon.$$

定义 12-3 设 A 为集合 X 到集合 Y 的映射集合。我们说，

---

*) 存在某些避免利用 Taylor 公式的引理 12-2 的证明(见习题 16)。

A 分离 X 的点,是指对于任何 $x, y\in X$, $x\neq y$, 存在 $f\in A$, 满足 $f(x)\neq f(y)$.

例如,当 X 为距离空间时,$\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$分离 X 的点,因为当 $a, b\in X$, $a\neq b$ 时,连续函数 $x\to d(a, x)$ 分离 a 和 b.

现在我们可以陈述下列所求的基本定理:

定理 12-4 (Stone-Weiestrass) 设 A 为$\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ 的子代数,满足:

1° A 分离 X 的点;

2° 对于任何 $x\in X$, 存在 $f\in A$, 使得 $f(x)\neq 0$.

那末

$$\overline{A}=\mathscr{C}(X, \mathbb{R}).$$

证明 1° 首先我们证明,对于任何 x。$y\in X$, $x\neq y$, 以及对于任何数量 α, β, 存在 $f\in\overline{A}$, 使得 $f(x)=\alpha$ 和 $f(y)=\beta$. 显然只需对于 A 来证明这点.

如果存在 $g\in A$, 满足 $g(x)\neq g(y)$, 且 $g(x)$, $g(y)\neq 0$, 则可置

$$f=a_1g+a_2g^2.$$

由假设,下列条件满足:

$$g(x)g^2(y)-g(y)g^2(x)=g(x)g(y)(g(y)-g(x))\neq 0,$$

故存在数量 a_1, a_2, 满足 $f(x)=\alpha$, $f(y)=\beta$.

但这样的 g 是存在的; 因为存在 g_1 满足 $g_1(x)\neq g_1(y)$; 如果 $g_1(x)$ 和 $g_1(y)\neq 0$, 就取 $g=g_1$; 如果相反,例如 $g_1(x)=0$, 则存在 g_2 满足 $g_2(x)\neq 0$, 并取 $g=g_1+\varepsilon g_2$, 其中 $\varepsilon\neq 0$, 且小到足以保证 $g(x)\neq g(y)$ 和 $g(y)\neq 0$.

2° 由 A 是代数, $\overline{A}$ 也是代数, 因为如果 $f, g\in\overline{A}$, 且 $f=\lim f_n$, $g=\lim g_n$, 其中 $f_n, g_n\in A$, 则有

$$f+g=\lim(f_n+g_n);\quad \lambda f=\lim\lambda f_n;\quad fg=\lim f_ng_n,$$

从而 $(f+g)$, λf 和 fg 也属于 $\overline{A}$.

3° $\overline{A}$ 是闭代数,则由 12-2, 也是格; 从而根据引理 12-1 和上

面的性质 1°, 任何 $f\in\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ 属于 $\overline{A}$, 故 $\overline{A}=\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$.

注 1° 在应用中也可方便地把定理表述为:

如果 $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ 的元素族 (f_i) 分离 X 的点, 且 f_i 不在 X 的同一点上同时为零, 那末 $f\in\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ 是关于 f_i 的(无常数项的)多项式的一致极限.

2° 如果 A 包含非零常数, 定理 12-4 的条件 2 就满足.

系 12-5 设 A 为 $\mathscr{C}(X, \mathbb{C})$ 的(体 $\mathbb{C}$ 上的)子代数, 满足:

1° A 分离 X 的点;

2° 对于任何 $x\in X$, 存在 $f\in A$, 满足 $f(x)\neq 0$;

3° 对于任何 $f\in A$, 也有 $\bar{f}\in A$(其中 $\bar{f}$ 表示 f 的复共轭).

那末
$$\overline{A}=\mathscr{C}(X, \mathbb{C}).$$

事实上, A 的取实值的函数的 ($\mathbb{R}$ 上的)子代数 A_r 符合定理 12-4 的条件 1 和 2, 因为如果 f 分离 x 和 y, $\mathscr{R}f$ 或 $\mathscr{R}(if)$ 也分离 x 和 y; 而如果 $f(x)\neq 0$, $\mathscr{R}f(x)$ 或 $\mathscr{R}(if)(x)$ 也不等于 0.

因此, $\overline{A_r}=\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$; 从而 $\overline{A_r+iA_r}=\mathscr{C}(X, \mathbb{C})$.

Z 系的条件 3 是本质的. 事实上我们取 X 为 $\mathbb{C}$ 的单位圆盘, A 为复变量 z 的多项式在 X 上的迹的集合. 代数 A 符合条件 1 和 2, 但不符合条件 3. 可以验证, $A\neq\mathscr{C}(X, \mathbb{C})$; 例如, 可以注意到, 对于任何 $f\in A$, 以至对于任何 $f\in\overline{A}$, $f(0)$ 是 f 在单位圆上的平均值, 这并非是对于任何 $f\in\mathscr{C}(X, \mathbb{C})$ 都成立的.

应用 1° 设 X 为 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集; n 个坐标函数 $x\to x_i$ 的族 (f_i) 分离 X 的点. 因此, 任何函数 $f\in\mathscr{C}(X, \mathbb{C})$ 是 n 个变量的复系数多项式的一致极限(当 $0\in X$ 时, 有常数项; 当 $0\notin X$, 只要愿意, 可以没有常数项).

2° 设 X 为 $\mathbb{C}$ 的单位圆 $|z|=1$; 函数 $z\to z$ 分离 X 的点, 且在 X 上不为零; 因而由 z 和 $\bar{z}$ 生成的代数在 $\mathscr{C}(X, \mathbb{C})$ 中处处稠.

我们以 φ 表示 $\mathbb{R}$ 到 X 的映射 $t\mapsto e^{it}$. 对于任何 $f\in\mathscr{C}(X, \mathbb{C})$, $f\circ\varphi$ 是 $\mathbb{R}$ 上的周期为 2π 的连续函数; 而我们知道(参看第三章), 任何 $\mathbb{R}$ 上的周期为 2π 的周期连续函数有这种形式*).

因为 f 是 z 和 $\bar{z}$ 的多项式的一致极限, $f\circ\varphi$ 是 e^{it} 和 e^{-it} 的多项式的一致极限; 换句话说, 任何 $\mathbb{R}$ 上的周期为 2π 的复值连续函数是三角多项式 $\sum_{-n}^{n} a_p e^{ipt}$ 的一致极限.

3° 设 X, Y 为两个紧距离空间; 我们以 $\mathscr{C}$ 表示赋范空间 $\mathscr{C}(X\times Y, \mathbb{R})$, 以 $\mathscr{C}_X$ (相应地, $\mathscr{C}_Y$) 表示由形式为 $(x, y)\to g(x)$ (相应地, $h(y)$)的函数组成的 $\mathscr{C}$ 的子集.

$\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ 分离 X 的点, 因为如果 a, $b\in X$, $a\neq b$, 连续函数 $x\to d(a, x)$ 分离 a 和 b; 同样, $\mathscr{C}(Y, \mathbb{R})$ 分离 Y 的点. 另一方面, $X\times Y$ 的两个不同的点, 或者它们的横坐标不同, 或者它们的纵坐标不同; 因而 $\mathscr{C}_X\cup\mathscr{C}_Y$ 分离 $X\times Y$ 的点. 此外, 由于这个集合包含函数 1, 由 $\mathscr{C}_X\cup\mathscr{C}_Y$ 张成的代数 A 在 $\mathscr{C}$ 中处处稠. 这个代数 A 无非就是下列形式的函数集合:

$$f(x, y)=\sum_{i=1,2,\cdots,n} g_i(x)h_i(y).$$

4° 上述的应用 1° 指出, x 的多项式集合在 $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ 上处处稠. 如果置

$$x=e^{-t}, \text{ 其中 } t\in[0, \infty[,$$

则由此可导得, 和 $\sum_{0}^{p} a_n e^{-nt}$ 的集合在被赋以一致距离的、在 $[0, \infty[$ 上连续且在无限远处有极限的函数空间中处处稠.

可以验证, 通过去掉常数 a_0, e^{-kt} (其中 $k=1, 2, \cdots$, 或简单地 $k>0$) 的线性组合在被赋以一致距离的、在 $[0, \infty[$ 上连续且在无限远处趋于 0 的函数空间中处处稠.

---

*) 这是 Fourier 级数理论中熟知的结论. 可参看任何一本这方面的著作. ——译者注

连续函数的延拓 设 X 为拓扑空间，Y 为 X 的闭子集，f 为 Y 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射. 我们的问题是能否把 f 延拓为 X 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射. 我们即将看到，当 X 紧、可距时，Stone-Weierstrass 定理不难提供一个答案.

命题 12-6 如果 Y 表示紧距离空间 X 的闭子集，那末 $f\in\mathscr{C}(Y,\mathbb{R})$ 是 $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ 的元素在 Y 中的限制.

证明 1. $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ 分离 X 的点(从而也分离 Y 的点). 这是因为如果 $a,b\in X$，$a\neq b$，连续函数 $x\to d(a,x)$ 分离 a 和 b. 因此对 Y 应用定理 12-4 可指出，对于任何 $g\in\mathscr{C}(Y,\mathbb{R})$ 和任何 $\varepsilon>0$，存在 $g_\varepsilon\in\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$，使得 $|g_\varepsilon(y)-g(y)|<\varepsilon$ 对于任何 $y\in Y$ 成立. 我们将再进一步假设 g 和 g_ε 有同样的界(如果 g_ε 没有这个性质，我们用 $\sup(\alpha,\inf(\beta,g_\varepsilon))$ 来代替它，其中 α 和 β 分别表示 g 的下确界和上确界).

2. 利用递推，我们用下列条件(使用 (1) 的记号)来定义 $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ 的元素列 $g^{(n)}$:

$$g^{(1)}=f_{\frac{1}{2}};\quad g^{(n)}=\left(f-\sum_1^{n-1}g^{(i)}\right)_{(\frac{1}{2})^n}\quad 当\ n>1.$$

由此可导得

$$\left|f(y)-\sum_1^n g^{(i)}(y)\right|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n\quad 在\ Y\ 上成立;$$

$$\left|g^{(n)}(x)\right|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad 在\ X\ 上成立.$$

因此，一方面，通项为 $g^{(n)}$ 的级数在 X 中一致收敛，另一方面，它的和 g 在 Y 上等于 f.

V. 定义在 $\mathbb{R}$ 的区间上的函数

在 $\mathbb{R}$ 的区间上存在序结构和仿射结构，这就使得可以对于定义在这些区间上的函数定义与这两种结构相联系的概念，诸如左、

右极限、单调性、可导性、凸性等.

这里我们即将考察这些概念.

13. 左、右极限

我们记得(第五章, § 8), 如果 I 是 $\mathbb{R}$ 的区间, E 是分离拓扑空间, f 是 I 到 E 的映射, 我们说, f 在 I 的点 a 有右极限, 是指 $\lim\limits_{\substack{x>a \\ x\to a}} f(x)$ 存在.

于是我们把这个极限记为 $f(a_+)$; 用同样的方式可定义 $f(a_-)$.

定义 13-1 我们说 a 是 f 的第一类不连续点, 是指一方面 $f(a_-)$ 和 $f(a_+)$ 存在, 而另一方面又没有 $f(a_-)=f(a)=f(a_+)$.

例 1° $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的映射 $x\to$(x 的整数部分)的第一类不连续点为整数 1, 2, ….

2° $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的映射 f 定义为:

$$f(x)=0,\ \text{当}\ x=0\ \text{和}\ x\ \text{为无理数},$$

$$f(x)=q^{-1},\ \text{当}\ x=(\text{不可约分数}\ pq^{-1});$$

则所有非零有理数是它的第一类不连续点.

3° $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 f 定义为: 当 x 是有理数时, $f(x)=0$, 当 x 是无理数时, $f(x)=1$; 则它没有任何第一类不连续点.

下面的例子给我们指出, 如果不对 E 作任何限制性假设, I 的所有点都可以是第一类不连续点.

我们以 E 表示乘积集合 $\mathbb{R}\times\{1, 2, 3\}$, 并赋以如下定义的字典排列序关系:

对于任何 $x\in\mathbb{R}$, 我们有 $(x, 1)<(x, 2)<(x, 3)$, 而对于任何 $x, y\in\mathbb{R}$, 凡满足 $x<y$ 的, 我们有 $(x, i)<(y, j)$, 这里 $i, j\in\{1, 2, 3\}$, 且各可取 1, 2, 3 中任意的一数.

于是我们对 E 赋以序拓扑, 并以 f 表示 $\mathbb{R}$ 到 E 的映射 $x\to$

$(x, 2)$.

可以验证，E 局部紧，且对于任何 $x\in\mathbb{R}$，有：

$$f(x_-)=(x, 1),\quad f(x_+)=(x, 3).$$

相反，当 E 可距时，这种奇性是不可能有的.

命题 13-2 如果 f 是 $\mathbb{R}$ 的区间 I 到距离空间 E 的映射，那末 f 的第一类不连续点集合 D 至多为可数集.

事实上，我们以 D_n 表示 f 的不连续点集合，其上 f 的振幅 $\geqslant n^{-1}$.

集合 D_n 只有孤立点，因为如果 a 为 D_n 的聚点，则 a 是 D_n 的不同点的单调列的极限；不妨设这个序列递减，则 $f(a_+)$ 不可能存在，故 $a\notin D_n$.

只有孤立点的集合 D_n 至多为可数集；而由于 $D=\bigcup D_n$，D 至多为可数集.

Z 存在在所有点上都不连续的函数，但它没有任何第一类不连续点；上面的例 3 就是如此.

定义 13-3 设 f 为 $\mathbb{R}$ 的区间 I 到距离空间 E 的映射.

1° 我们说 f *正规*，是指它只有第一类不连续点.

2° 我们说 f 为*阶梯函数*，是指存在 I 的分成子区间(可能退化为一点)的分划，使得 f 在每个子区间上为常数.

命题 13-2 指出，正规函数的不连续点集合至多为可数集. 此外，显然任何阶梯函数是正规的，但逆命题不正确，因为任何连续函数正规.

命题 13-4 正规函数集合对于一致极限稳定.

事实上，假设 f 是正规函数 f_n 的一致极限；对于任何 $a\in I$，$f_n(a_+)$ 和 $f_n(a_-)$ 存在，故 $f(a_+)$ 和 $f(a_-)$ 也存在.

这里我们注意到，如果距离空间 E 是赋范向量空间，则 $\mathscr{F}(I, E)$ 的正规函数集合是 $\mathscr{F}(I, E)$ 的向量子空间.

命题 13-5 假设区间 I 紧，距离空间 E 任意.

那末正规函数类恒同于阶梯函数的一致极限类.

证明 由于任何阶梯函数正规，命题 13-4 指出任何阶梯函数的一致极限也正规.

反之，设 f 为正规函数，ε 为 >0 的数. 对于任何 $x\in I$，存在两个非空区间 $]\alpha_x, x[$ 和 $]x, \beta_x[$，其上 f 的振幅 $<\varepsilon$. 由于 I 紧，存在形为 $]\alpha_x, \beta_x[$ 的区间的 I 的有限覆盖，从而存在把 I 分为区间 I_n（可能退化为一点）的有限分划，在这些区间上，f 的振幅 $<\varepsilon$. 在每个 I_n 上为常数、且在 I_n 的中点与 f 相等的函数 f_ε 显然以 ε 精度逼近 f.

系 紧区间 I 到距离空间 E 的任何正规映射有界.

14. 单调函数

如果 f 是区间 I 到 $\mathbb{R}$ 的递增映射，则对于任何 $a\in I$，有

$$f(a_-)=\sup_{x<a} f(x); \quad f(a_+)=\inf_{x>a} f(x).$$

因此，任何递增函数（以至任何递减函数）是正规函数；特别是它们的不连续点集至多为可数集.

这样，任何两个递增函数的差，即有界变差函数（第五章命题 24-8）是正规函数. 这个结果可能会使我们期望，反之，任何正规数值函数有有界变差；但是这是不可能的，因为甚至存在 $[0, 1]$ 上的有无界变差的连续函数.

例 熟悉几个相当古怪的递增函数的经典例子是有益的，它们可以看作我们数学研究园地的篱笆.

1° 设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ 为开区间 $]0, 1[$ 中的可数点集，且满足 $\overline{A}=[0, 1]$，(α_n) 为和是 1 的无限正数列.

对于任何 $x\in[0, 1]$，置：

$$f(x)=\sum_{a_n<x}\alpha_n.$$

换句话说，求和是对所有满足 $a_n<x$ 的 n 来进行的. 直接可得，f 在 $[0, 1]$ 上严格递增，且 $f(0)=0$, $f(1)=1$，而它的不连续点集为 A.

2° 现在置 $f([0, 1])=B$，其中 f 为上一例子中定义的函数. B 到 $[0, 1]$ 上的映射 f^{-1} 是严格递增的；可以验证：

a) f^{-1} 可以用唯一的方式延拓为 $[0, 1]$ 到 $[0, 1]$ 上的递增映射 g；

b) g 是连续的；

c) 在 $[0, 1]$ 上使 g 为常数的区间长度和等于 1，这就使得 g 的变差是在一个将在积分论中明确的"零测度"集合上求得.

15. 有限增量定理

我们不在这里复习单实变量函数之导数的经典初等性质. 相反，我们将证明若干有关"有限增量"的定理，它们能使结果从局部上升到整体，并且还能代替只对实值可导函数成立的经典的有限增量定理*).

在此以后，I 表示 $\mathbb{R}$ 的任意区间，D 为 I 的有限或可数子集；在最经典的陈述中，这个集合 D 或者是空的，或者退化为 I 的端点.

引理 15-1 设 f 为 I 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射，且对于任何满足 $x\notin D$ 的 I 的内点 x 和任何 $\delta>0$，存在 $y\in]x, x+\delta[$，使得 $f(x)\leqslant f(y)$.

那末 f 在 I 上递增.

---

*) 在我国的数学分析课本中，更常用的名称是"中值定理"，或"Lagrange 定理"。——译者注

证明 设 $u, v\in I, u<v$, k 为任意的满足

$$k<f(u);\quad k\notin f(D)$$

的数．又设 A 为满足 $k\leqslant f(x)$ 的 $x\in[u, v]$ 的集合；这个集合不是空的，因为它包含 u，同时它又是闭的，因为 f 连续；故它也包含数 $\alpha=\sup A$.

假设 $\alpha<v$；则不可能有 $k<f(\alpha)$，否则 α 将在 A 的内部；故 $k=f(\alpha)$．而 $\alpha\notin D$，因为 $f(\alpha)=k\notin f(D)$；故由引理的假设，存在 $\beta\in]\alpha, v[$ 使得 $f(\alpha)\leqslant f(\beta)$；这样 $\beta\in A$，而这就与 $\alpha=\sup A$ 矛盾．

于是有 $\alpha=v$，换句话说，$k\leqslant f(v)$；由于 $f(D)$ 至多是可数的，故存在可任意接近 $f(u)$ 的 k；因此 $f(u)\leqslant f(v)$.

换句话说，f 递增．

引理 15-2 设 φ 为 I 到距离空间 E 的连续映射，g 为 I 到 $\mathbb{R}$ 的递增连续映射．

假设，对于任何满足 $x\notin D$ 的 I 的内点 x 和任何 $\delta>0$，存在 $y\in]x, x+\delta[$，使得

$$d(\varphi(y), \varphi(x))\leqslant g(y)-g(x). \tag{1}$$

那末对于任何 $u, v\in I, u<v$，有

$$d(\varphi(v), \varphi(u))\leqslant g(v)-g(u).$$

事实上，给定 u 和 v，对于任何 $x\in[u, v]$ 置

$$f(x)=g(x)-d(\varphi(u), \varphi(x)).$$

对于任何满足 $x<y$ 和使(1)成立的 $x, y\in[u, v]$，有：

$$\begin{aligned}f(x)-f(y)&=g(x)-g(y)+d(\varphi(u), \varphi(y))-d(\varphi(u), \varphi(x))\\&\leqslant g(x)-g(y)+d(\varphi(y), \varphi(x))\leqslant 0.\end{aligned}$$

于是由引理 15-1，f 在 $[u, v]$ 上递增；故

$$0\leqslant f(v)-f(u),\quad \text{即}\quad d(\varphi(v), \varphi(u))\leqslant g(v)-g(u).$$

现在为了重新回到形式上更经典的陈述，我们给出下列定义：

定义 15-3 设 φ 为 I 到赋范空间*) E 的映射. 我们说 φ 在 I 的点 a 上右可导(其中 a 不是 I 的右端点), 是指 E 的元素 $h^{-1}(\varphi(a+h)-\varphi(a))$ 当 h 取 >0 的值趋向于零时有极限. 我们称这个极限为 φ 在 a 上的右导数, 并记作 $\varphi'_d(a)$.

我们于是可记:

$$\Delta\varphi=\varphi(a+h)-\varphi(a)=h(\varphi'_d(a)+\varepsilon(h)), \text{ 其中 } \lim_{h\to0}\varepsilon(h)=0.$$

从而对于任何 $\varepsilon>0$, 有:

$$h(\|\varphi'_d(a)\|-\varepsilon)\leqslant\|\Delta\varphi\|\leqslant h(\|\varphi'_d(a)\|+\varepsilon)$$

对任何足够小的 h 成立.

特别是 φ 在点 a 上右连续.

同样也可定义左导数; 如果 φ 在点 a 左、右可导, 且两个导数相等, 我们则说 φ 在 a 可导.

定理 15-4 如果连续数值函数 φ 在 $(I\dot{-}D)$ 的任何点上右可导, 且 $m\leqslant\varphi'_d(x)\leqslant M$ 对于任何 $x\in(I\dot{-}D)$ 成立, 那末有

$$m(v-u)\leqslant\varphi(v)-\varphi(u)\leqslant M(v-u) \quad \text{对于 } u<v \text{ 成立}.$$

当 φ 在 $[u, v]$ 上不是仿射函数时, 不等式是严格的.

证明 首先指出, 如果对于任何 $x\notin D$, $\varphi'_d(x)\geqslant0$, 则 φ 递增. 事实上, 给定 ε, 对于任何 $x\notin D$, 只要 h 充分小, 我们有:

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)\geqslant-\varepsilon h.$$

因此, 函数 $f: x\to\varphi(x)+\varepsilon x$ 符合引理条件, 故它递增; 由于这对于任何 $\varepsilon>0$ 都成立, φ 也递增.

而函数 $\varphi_1: x\to Mx-\varphi(x)$ 和 $\varphi_2: x\to\varphi(x)-mx$ 都在 $(I\dot{-}D)$ 的点上有 $\geqslant0$ 的右导数, 从而它们都递增, 以至所求的联立不等式成立.

最后, 如果 φ 在 $[u, v]$ 上不是导数为 M 的仿射函数, 递增函

---

*) 赋范空间的定义可参看第七章 2-1 和 4-1.

数 $(Mx-\varphi(x))$ 在 $[u, v]$ 中不是常数，故

$$Mu-\varphi(u)<Mv-\varphi(v).$$

对于 $\varphi(x)-mx$ 我们可以有同样推理.

定理 15-5 设 φ 为 I 到赋范空间 E 的连续映射，g 为 I 到 $\mathbf{R}$ 的递增连续映射.

假设 φ 和 g 在 $I\dot{-}D$ 的任何点上都右可导，且

$$\|\varphi_d'(x)\|\leqslant g_d'(x).$$

那末对于任何 $u, v\in I, u<v$，有

$$\|\varphi(v)-\varphi(u)\|\leqslant g(v)-g(u).$$

证明 给定 $\varepsilon>0$；对于任何满足 $x\notin D$ 的 I 的内点 x，存在任意小的 $h>0$，使得

$$\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|\leqslant h(\|\varphi_d'(x)\|+\varepsilon)$$
$$\leqslant h(g_d'(x)+\varepsilon)\leqslant g(x+h)-g(x)+2\varepsilon h.$$

把引理 15-2 用到函数 φ 和 $x\to g(x)+2\varepsilon x$ 上，则有

$$\|\varphi(v)-\varphi(u)\|\leqslant g(v)-g(u)+2\varepsilon(v-u).$$

这个关系式对于任何 $\varepsilon>0$ 成立，故所求关系式也成立.

系 15-6 如果 $\|\varphi_d'(x)\|\leqslant M$ 对于任何 $x\in I\dot{-}D$ 成立，则 φ 是 I 上的比为 M 的 Lipschitz 映射.

系 15-7 设 f 为 I 到赋范空间 E 的连续映射，且在 $I\dot{-}D$ 的所有点上右可导，$u\in E$.

如果对于任何 $x\in I\dot{-}D$ 有 $\|f_d'(x)-u\|\leqslant\varepsilon$，那末对于任何 $a, b\in I$：

$$\|f(b)-f(a)-(b-a)u\|\leqslant\varepsilon(b-a).$$

为此只需对由 $\varphi(x)=f(x)-xu$ 定义的 φ 来应用 15-6.

1° 我们刚才建立的所有陈述都只与定义在 $\mathbf{R}$ 的区间 I 上的函数有关；稍后我们将看到这里的某些陈述可推广到以 $\mathbf{R}^n$ 的凸集代替 I 的情形，其中只需利用凸集中的任意两点

都是包含在凸集中的直线段的端点.

但是我们即将看到一个例子，它说明不可能把 I 换为一般的距离空间：

设 J 为如下定义的 Euclide 平面 $\mathbb{R}^2$ 的子集：J 是直线区间 $[(1,0),(0,k)]$ 和 $[(-1,0),(0,k)]$ 的并.

我们把 J 到 $\mathbb{R}$ 的映射 φ 定义为线性形式 $(x_1,x_2)\to kx_1$ 在 J 上的限制.

容易验证，如果 J 被赋以 Euclide 距离，则 φ 在 J 的每一点的邻域内都是比为 1 的 Lipschitz 映射．但可以使 φ 是比为 k' 的 Lipschitz 映射的最小数 k' 是 k，而 k 可能任意大.

2° 引理 15-1 的证明只利用了 $f(D)$ 不包含任何区间的事实；因此我们可以期望在陈述中所述的集合 D 的类有所扩大．但是，一些精巧的例子指出，这种推广是不方便的，也没有多少意义：这种例子之一就是第 14 节中所构造的递增连续函数 g，它除了在一个"零测度"的闭集的点上外，处处有零(从而 $\leqslant 0$) 导数，但它却是递增的，且不是常数.

3° 我们的所有陈述都让右导数处于优先地位；显然，我们也可在这些陈述中把右导数换为左导数．此外，一般所研究的函数将是在 $(I\dot{-}D)$ 的任何点上有双边导数.

16. 凸函数的定义、直接性质

在第 8 节中我们已经看到上包络运算对于创造新函数类的重要性；这一重要性将再次对于与仿射函数的上包络恒同的凸函数显示出来．这里我们将利用在第四章中定义和研究过的凸集的概念[*].

[*] 我们简单地回顾一下：$\mathbb{R}$ 上的向量空间的子集 X 称为凸的，是指对于任何 $x, y\in X$，线段 $[x, y]$ 包含在 X 中.

定义 16-1 设 f 为有限数值函数，定义在 $\mathbb{R}$ 的区间 I 上.

我们说 f 是凸的，是指对于任何 $x_1, x_2\in I$，f 的图象 Γ 的任何满足 $x\in[x_1, x_2]$ 的的点 $M(x)$在线段 $M(x_1)M(x_2)$ 之下（我们用 $M(x)$ 表示点 $(x, f(x))$；换句话说：

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)$$

对于任何满足 $\alpha_1+\alpha_2=1$ 的 $\alpha_1, \alpha_2\geqslant0$ 成立.

例如，任何仿射函数 $x\to ax+b$ 是凸的.

命题 16-2 f 是凸的等价于平面 $\mathbb{R}^2$ 中位于 f 的图象之上的点集 $A(f)$ 是凸的.

事实上，如果 f 是凸的，P_1, P_2 是横坐标为 x_1 和 x_2 的 $A(f)$ 的两个点，线段 $M(x_1)M(x_2)$ 在 Γ 之上，故线段 P_1P_2 也在 Γ 之上，因为 P_1 和 P_2 分别在 $M(x_1)$ 和 $M(x_2)$ 之上.

反之，如果 $A(f)$ 是凸的，$M(x_1)$ 和 $M(x_2)$ 是 Γ 的两个点，则这两个点也属于 $A(f)$；线段 $M(x_1)M(x_2)$ 属于 $A(f)$，故也在 Γ 之上.

定义 16-3 我们说定义在 $\mathbb{R}$ 的区间 I 上的有限数值函数是严格凸的，是指对于任何 $x_1, x_2\in I$，f 的图象 Γ 的任何满足 $x\in]x_1, x_2[$ 的点严格地在线段 $M(x_1)M(x_2)$之上.

这等价于 f 是凸的以及 f 的图象 Γ 不包含共线的三点. 事实上，如果 M_1, M_2, M_3 为横坐标是 x_1, x_2, x_3 的 Γ 的三个共线点，其中 $x_1<x_2<x_3$，那末对于任何 $x\in[x_1, x_3]$，点 $M(x)$ 将在线段 M_1M_3 之上；因为否则例如有 $x_1<x<x_2$，且 $M(x)$ 严格地在 M_1M_2 之下，这将导致 M_2 严格地在 $M(x)M_3$ 之上，而这是不可能的.

因此，f 在 I 上是严格凸的等价于 f 是凸的，且不存在 I 的任何开区间，使得 f 在其上仿射.

定义 16-4 我们说定义在 $\mathbb{R}$的区间 I 上的有限数值函数 f

是凹的，是指 $(-f)$ 是凸的.

也可以将它说成是：位于 f 的图象之下的平面点集是凸的.

凸函数的运算 **命题 16-5** *a*) 任何凸函数的正线性组合是凸的.

b) 任何凸函数的简单极限是凸的.

c) 任何凸函数的有限上包络是凸的.

证明 陈述 a 和 b 由不等式

$$f_i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\leqslant\alpha_1 f_i(x_1)+\alpha_2 f_i(x_2)$$

可得，因为它对于正线性组合和取极限仍保持.

为了证明 c)，设 (f_i) 为上包络是 f(假设它处处有限)的凸函数族. 每个集合 $A(f_i)$ 都是凸的；而已知 $A(f)=\bigcap_i A(f_i)$，故 $A(f)$ 也是凸的. 换句话说，f 是凸的.

系 16-6 任何是仿射函数的上包络的有限数值函数是凸的.

17. 凸函数的连续性和可导性

命题 17-1 f 凸等价于函数 p:

$$p(x, y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\quad (其中\ x\neq y)$$

对于每个变量是递增的.

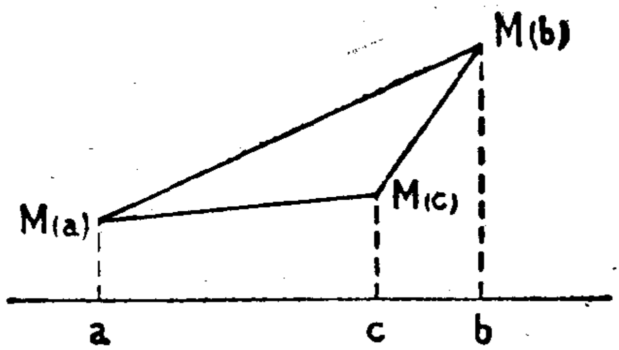


图 7

事实上 $p(x, y)$ 是直线 $M(x)M(y)$ 的斜率，而所述条件等价于如果 a, b, c 是 I 的满足 $a<c<b$ 的三点，则有：

$M(a)M(c)$的斜率 $\leqslant M(a)M(b)$的斜率 $\leqslant M(c)M(b)$的斜率.

而这等于说 $M(c)$ 在线段 $M(a)M(b)$ 之下.

系 17-2 f 既是凸的又是凹的等价于 f 是仿射的.

只需注意,事实上 f 的凹性由 p 的递减性来刻划.

这样,如果 f 既凸又凹,则 p 是常数. 因而

$$f(x)-f(y)=k(x-y).$$

即 f 是仿射的. 逆命题显然成立.

命题 17-3 任何开区间 I 上的凸函数 f 在所有点上有左、右

导数(从而连续),且当 $a<b$ 时,有

$$f'_g(a)\leqslant f'_d(a)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant f'_g(b)\leqslant f'_d(b).$$

证明 事实上,设 $x<a<y$, 且置

$$p(t)=(f(t)-f(a))/(t-a).$$

命题 17-1 指出, $p(x)\leqslant p(y)$.

因而 $p(y)$ 的下确界(其中 $a<y$) 有限, 且等于 $\lim\limits_{y\to a}p(y)$; 同

样, $p(x)$ 的上确界(其中 $x<a$) 也有限, 且等于 $\lim\limits_{x\to a}p(x)$. 这样,

$f'_d(a)$ 和 $f'_g(a)$ 存在,且有:

$$p(x)\leqslant f'_g(a)\leqslant f'_d(a)\leqslant p(y).$$

在这个关系式中取 $y=b$, 就得到所求不等式的一部分, 其他

部分只需交换 a 和 b 的作用可得.

Z 1° 闭区间 $[a, b]$ 上的凸函数可以不在端点上连续

例如, 在 $[a, b]$ 的内部为 0、而在端点上为 1 的函数 f 在

$[a, b]$ 上凸,但不连续.

2° 有界开区间上的凸函数可以不是有界的; 区间$]-1, 1[$上

的函数 $(1-x^2)^{-1}$ 就是这种情形.

3° 闭区间 $[a, b]$ 上的连续凸函数可以不在端点上可导

$[-1, 1]$ 上的函数 $-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ 就是这种情形. 尽管如此, 它还可以在两个端点上有广义导数, 即在 a 上导数为 $-\infty$, 而在 b 上导数为 $+\infty$.

系 17-4 函数 f'_g 和 f'_d 递增, 而 I 的 f 不可导的点集至多为可数集.

证明 例如, f'_g 的递增性由命题 17-3 的不等式可得. 同时, 由那些不等式也可得, 如果 $a<b$, 则区间 $]f'_g(a), f'_d(a)[$ 和 $]f'_g(b), f'_d(b)[$ 不相交; 因而这种区间至多只能有可数无限多个是非空的; 换句话说, $f'_g(x) \neq f'_d(x)$ 的点 x 的集合至多是可数集.

定义 17-5 设 f 为开区间 I 上图象为 Γ 的凸函数. 所谓 Γ 的点 $M(a)$ 上的承托直线是指任何通过 $M(a)$, 且位于 Γ 之下的直线 Δ.

命题 17-6 开区间上的凸函数的图象中的任何一点上至少存在一条承托直线.

事实上, 命题 17-3 的不等式指出, 为使 Δ 为 $M(a)$ 上的承托直线, 必须且只需它的斜率 p 满足关系式:

$$f'_g(a) \leqslant p \leqslant f'_d(a).$$

特别是, 如果 f 在 a 上可导, $M(a)$ 上仅有的承托直线为切线.

系 17-7 任何开区间上的凸函数为仿射函数族的上包络.

事实上, 只需取图象为 f 的图象的承托直线的仿射函数全体作为该仿射函数族.

这个系是系 16-6 的逆命题.

18. 凸性准则

命题 17-1 已经提供了凸性的一条方便的准则; 下面是另一条:

命题 18-1 设 f 为开区间 I 上的有限数值函数，D 为 I 的至多为可数的子集. 为使 f 是凸的，必需且只需 f 连续，在 $I\dot{-}D$ 的所有点上有右导数 f'_d，且 f'_d 在 $I\dot{-}D$ 上递增.

证明 根据系 17-4，我们已经知道条件是必要的. 反之，假设它满足. 令 a, b, c 为 I 的三个点，且 $a<b<c$；置:

$$k_1=\sup_{x<b} f'_d(x) \quad 和 \quad k_2=\inf_{x\geqslant b} f'_d(x).$$

定理 15-4 指出:

$$f(b)-f(a)\leqslant k_1(b-a) \quad 和 \quad k_2(c-b)\leqslant f(c)-f(b).$$

由于 $k_1\leqslant k_2$，故有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant\frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

这个关系式指出，$M(c)$ 在 $M(a)M(b)$ 之下. 因此 f 凸.

系 18-2 如果函数 f 在开区间 I 的所有点上有二阶导数 f''，那末它是凸的等价于 $f''\geqslant 0$.

现在下面是一条可由局部过渡到整体的准则.

命题 18-3 设 f 为开区间 I 上的有限数值函数. 如果任何 I 的点都是其上 f 为凸的区间的内点，那末 f 在 I 上凸.

事实上，局部凸性导致 f'_d 在 I 的所有点上存在，且局部递增. I 的任何区间 $[a, b]$ 可以用有限个其上 f'_d 递增的开区间覆盖；由此立刻得到 $f'_d(u)\leqslant f'_d(v)$；故 f_d 在 I 上递增. 根据命题 18-1，f 因而 f 是凸的.

最后，下面是一条仅只有点历史意义的准则:

命题 18-4 设 f 为开区间 I 上的有限连续数值函数(或者甚至只要求下半连续).

如果对于任何 $a, b\in I$，有:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(f(a)+f(b)),$$

那末函数 f 是凸的.

证明 设 a, b 在 I 中, 且 $a<b$; $y=d(x)$ 为直线 $M(a)M(b)$ 的方程. 如果 $f(x)\leqslant d(x)$ 在 $[a, b]$ 上不成立, 则满足 $f(x)>d(x)$ 的 $[a, b]$ 的点 x 的集合 ω 非空, 且是开集, 因为 $(f-d)$ 是下半连续的. 设 $]\alpha, \beta[$ 为 ω 的连通成分; 则在 $]\alpha, \beta[$ 上有 $f(x)>d(x)$, 且对于 $x=\alpha$ 或 β, 有 $f(x)-d(x)\leqslant 0$. 因此, 我们有

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>d\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}(d(\alpha)+d(\beta))\geqslant\frac{1}{2}(f(\alpha)+f(\beta))$$

或
$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>\frac{1}{2}(f(\alpha)+f(\beta)),$$

与假设矛盾.

Z 存在 R 上的处处不连续函数, 始终满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ *); 这种函数符合陈述 18–4 的不等式, 然而不是凸的, 因为否则它必须连续.

19. 向量空间的子集上的凸函数

命题16–2 的凸性准则启发我们提出一种便利的方法, 用来定义一个定义在体 R 上的向量空间 E 的子集 X 上的数值函数的凸性.

定义 19–1 设 f 为定义在 (R 上) 的向量空间 E 的子集上的有限数值函数.

我们说 f 是凸的, 是指位于 f 的图象之上的向量空间 $E\times\mathbf{R}$ 的点的集合 $A_X(f)$ 是凸集.

---

*) 这种函数也是 61 页上所要求的例子. 其作法如下: 首先把 **R** 看作 **Q** 上的向量空间, $\{r_\alpha\}\subset\mathbf{R}$ 为这一向量空间的代数基(它的存在需要选择公理, 参看第七章习题 68°). 则每一 $x\in\mathbf{R}$ 可唯一表示为 $x=\sum\limits_{\alpha}p_{\alpha x}r_\alpha$, 其中 $p_{\alpha x}\in Q$, 且只有有限个不为零. 令 $f(x)=\sum\limits_{\alpha}p_{\alpha x}$. 则 f 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 且由于它只取有理值, 不可能连续. ——译者注

命题 19-2 为使定义在向量空间 E 的子集 X 上的有限数值函数 f 是凸的,必需且只需 X 是凸集,且 f 在 X 的任何线段 I 上的限制是凸的.

证明 条件是必要的,因为如果 f 是凸的,集合 $A_X(f)$ 是凸的,故 X 作为 $A_X(f)$ 在 E 上的射影也是凸的. 另一方面,对于任何直线段 $I\subset X$,集合 $A_I(f)$ 是 $A_X(f)$ 与凸集 $I\times\mathbb{R}$ 的交,故 $A_I(f)$ 是凸的.

条件是充分的,因为设 P_1 和 P_2 是 $A_X(f)$ 的两个点,p_1 和 p_2 是它们在 X 上的射影. 如果 f 在线段 $I=[p_1p_2]$ 上的限制是凸的,线段 $[P_1P_2]$ 就属于 $A_I(f)$,故也属于 $A_X(f)$.

许多对于单实变量凸函数建立的命题立刻就可推广到这些一般凸函数上. 特别是,凸函数的系数 $\geqslant 0$ 的线性组合,凸函数的极限,凸函数的上包络都是凸函数.

如果我们限于定义在 $\mathbb{R}^n$ 的凸开集 X 上的凸函数 f,那末另一些性质也可推广. 例如这种 f 连续,且在 f 的图象的任何点上至少存在一个承托平面. 我们不再证明这后两条性质.

命题 19-3 如果 f 是凸的,集合 $\{x: f(x)\leqslant 0\}$ 也是凸的.

更一般地,如果 f 是凸的,而 g 是凹的,则满足 $f(x)\leqslant g(x)$ 的点 x 的集合是凸的.

事实上,如果 f 是凸的,且 $f(a)\leqslant 0$, $f(b)\leqslant 0$,那末也有 $f(x)\leqslant 0$ 对于任何 $x\in[a, b]$ 成立,故所研究的集合是凸的.

只需注意到 $(f-g)$ 是凸的,第二条陈述就由第一条陈述推得.

对于集合 $\{x: f(x)<g(x)\}$,我们有类似的陈述.

例 在 $\mathbb{R}^n$ 中,由 $\sum x_p^2/a_p^2\leqslant 1$ 来定义的椭球体是凸集.

同样,满足 $\sum \alpha_i\|x-a_i\|\leqslant 1$ 的 $\mathbb{R}^n$ 的 x 集合当 α_i 都 $\geqslant 0$ 时,是凸的.

命题 19-4 设 X（相应地，Y）是向量空间 E（相应地，F）的凸子集；f 为 Y 上的凸函数；φ 为 X 到 Y 的仿射映射.

那末 $f\circ\varphi$ 是 X 上的凸函数.

这是下列关系式的直接推论：

$$\varphi(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1\varphi(x_1)+\alpha_2\varphi(x_2) \quad 当\ \alpha_1+\alpha_2=1.$$

例 如果 f 是 Y 上的凸函数，由 $(x, y)\to f(x-y)$ 所定义的 Y^2 上的函数是凸的，因为映射 $(x, y)\to x-y$ 是线性的.

正齐次凸函数 **定义 19-5** 设 f 为定义在（$\mathbb{R}$ 上的）向量空间 E 的子集 X 上的数值函数. 我们说 f 是正齐次的，是指 X 是顶点为 O 的锥，且 $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ 对于任何 $x\in X$ 和任何 $\lambda\geqslant 0$ 成立.

命题 19-6 设 f 为定义在向量空间 E 的凸锥 X 上的正齐次有限数值函数.

1° 为使 f 是凸函数，必需且只需对于任何 x_1 和 $x_2\in X$，有 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

2° 此外，当 $f\geqslant 0$ 在 X 上成立时，为使 f 是凸的，必需且只需满足 $f(x)\leqslant 1$ 的 X 的点 x 的集合是凸集.

证明 1° 如果 f 是凸的，则对于任何 $x_1, x_2\in X$，有

$$f(x_1+x_2)=2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant 2\left[f\left(\frac{x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_2}{2}\right)\right]$$
$$=f(x_1)+f(x_2).$$

反之，如果 $f(u_1+u_2)\leqslant f(u_1)+f(u_2)$ 对于任何 $u_1, u_2\in X$ 成立，则对于任何 $\alpha_1, \alpha_2\geqslant 0$，有：

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\leqslant f(\alpha_1x_1)+f(\alpha_2x_2)=\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2).$$

因此 f 是凸的.

2° 令 B 为 X 的满足 $f(x)\leqslant 1$ 的集合.

如果 f 是凸的，命题 19-3 指出，B 是凸的. 反之，假设 $f\geqslant 0$,

B 是凸的：

如果 $x_1, x_2 \in X$，且 $k_1 > f(x_1)$，$k_2 > f(x_2)$，则有：

$$k_1^{-1}x_1 \in B \quad 和 \quad k_2^{-1}x_2 \in B.$$

因此，由于 B 是凸的，这两个点的系数分别规定为 k_1, k_2 的重心 $(k_1+k_2)^{-1}(x_1+x_2)$ 也属于 B；从而有：

$$f(x_1+x_2) \leqslant k_1+k_2 \quad 当\ k_1 > f(x_1),\ k_2 > f(x_2).$$

因为每个 k_i 可以取 $f(x_i)$ 的任意邻近的点，由此导得：

$$f(x_1+x_2) \leqslant f(x_1)+f(x_2).$$

从而 f 是凸的.

例 对于任何纯量 $\alpha>0$，函数 f：

$$(x_p) \to (\sum |x_p|^\alpha)^{1/\alpha}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上是正齐次的. 既然当 $\alpha \geqslant 1$ 时，函数 $|x_p|^\alpha$ 的每一个都是凸的，故 f^α 是凸的，集合 $\{x: f(x) \leqslant 1\}$ 也是凸的. 因此 f 也是凸的.

二次可导的凸函数 设 f 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 的开凸集 X 上的数值函数. 假设 f 有二阶连续偏导数.

对于任何 $a \in X$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}^n$，映射 φ: $t \to f(a+t\alpha)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 的含 0 的开区间上的函数，且在 0 上有二阶导数为：

$$\varphi''(0) = \sum \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

既然 f 的凸性等价于它在 X 的线段上的限制的凸性，于是也就是等价于函数 φ 的凸性. 这点也可表达为（系 18-2）·对于任何 a, α 有关系式 $\varphi''(0) \geqslant 0$；因此我们可以陈述：

命题 19-7 为使定义在 $\mathbb{R}^n$ 的开凸集 X 上的有二阶连续偏导数的数值函数 f 是凸的，必须且只须对于任何 $a \in X$，二次形式

$$\sum \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \geqslant 0.$$

1° 必须很好地注意到，关系式 $\partial^2 f/\partial x_i^2 \geqslant 0$ 对于 f 的凸性是完全不够的. 例如函数 $(x^2+3xy+2y^2)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的任何开凸集上都不是凸的.

2° 如果 f 定义在 $\mathbb{R}^n$ 的非凸的开集 X 上，且符合命题 19-7 的条件，那末它在 X 的任何开凸集上是凸的，但一般不能延拓为在包含 X 的凸集上的凸函数.

例如，可以验证，如果 X 是如下定义的 $\mathbb{R}^2$ 的开集：

$$X=\{(x,\ y):\ y<4x^2\}$$

函数 $(y-x^2)^2+x^4$ 在 X 的任何邻域内是凸的，但不能延拓为 $\mathbb{R}^2$、中的凸函数.

20. 单调函数的相对平均值

分析，甚至是初等分析，都利用各种平均值，诸如算术、几何、平方、调和平均值等. 我们即将在这里推广这些初等概念，并阐明与它们有关的基于凸性的一些不等式.

为了简化语言，我们将在这里称任何有限族 $\mu=(\alpha_i,\ x_i)_{i\in I}$ 为集合 E 上的*离散测度*，这里 $x_i\in E$，α_i 为 >0 的数. 我们说 μ 被 E 的子集 X 所支撑，是指 X 包含所有点 x_i.

$\mu=(\alpha_i,\ x_i)_{i\in I}$ 的总质量是数 $\|\mu\|=\sum\alpha_i$. 如果 φ 表示 E 到另一个集合 F 的映射，$\mu=(\alpha_i,\ x_i)_{i\in I}$ 被 E 所支撑，我们称 F 上的测度 $\varphi(\mu)=(\alpha_i,\ \varphi(x_i))_{i\in I}$ 为 μ 通过 φ 的象；显然有 $\|\varphi(\mu)\|=\|\mu\|$.

如果 E 是向量空间，那末 μ 的重心为 E 的点 $\|\mu\|^{-1}\sum\alpha_i x_i$，我们将记它为 $\mathscr{M}_1(\mu)$；对于任何纯量 $k>0$，测度 $k\mu=(k\alpha_i,\ x_i)_{i\in I}$ 有与 μ 同样的重心；特别是，对于 $k=\|\mu\|^{-1}$，测度 $k\mu$ 有总质量为 1，这有时是很方便的.

重心 $\mathscr{M}_1(\mu)$ 属于任何支撑 μ 的凸集；特别是如果 $E=\mathbb{R}$，我

们总有：

$$\inf(x_i)\leqslant\mathscr{M}_1(\mu)\leqslant\sup(x_i).$$

定义 20-1 设 f 为 $\mathbb{R}$ 的区间 A 上的严格单调的连续数值函数；又设 $\mu=(\alpha_i, x_i)_{i\in I}$ 为 A 上的离散测度；且以 f^{-1} 表示 f 的逆函数.

我们称数 $f^{-1}(\mathscr{M}_1(f(\mu)))$ 为 μ 相对于 f 的平均值，即满足

$$(\sum_i\alpha_i)f(a)=\sum_i\alpha_i f(x_i)$$

的数 a. 我们将记这个数 a 为 $\mathscr{M}_f(\mu)$.

这个数 a 的存在由 $\mathscr{M}_1(f(\mu))\in f(A)$ 可得；它的唯一性则由 f 是双射可得.

显然，$\mathscr{M}_f(\mu)\in A$，且更确切地有

$$\inf(x_i)\leqslant\mathscr{M}_f(\mu)\leqslant\sup(x_i).$$

以后，我们也可注意到 $\mathscr{M}_f=\mathscr{M}_{\alpha f+\beta}$ 对于任何 $\alpha, \beta\in\mathbb{R}, \alpha\neq 0$ 成立.

例 1° 如果取 f 为 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的恒等映射 $x\to x$，我们有

$$\mathscr{M}_f(\mu)=\mathscr{M}_1(\mu);$$

我们把这个平均值称为算术平均值，因为在所有 α_i 都相等的情形，我们恰好有：

$$\mathscr{M}_1(\mu)=n^{-1}(\sum x_i),$$

其中 n 是 I 的基数.

更一般地，我们以 $\mathscr{M}_r$ 表示相对于数值函数 $x\to x^r$ 的平均值，这里 x^r 当 $r>0$ 时定义在 $\mathbb{R}_+$ 上，当 $r<0$ 时定义在 $\mathbb{R}_+^*$ 上. 例如，$\mathscr{M}_{-1}$ 将是调和平均值，$\mathscr{M}_2$ 将是平方平均值.

2° 为了在稍后较方便起见，$\mathscr{M}_0$ 将表示相对于定义在 $\mathbb{R}_+^*$ 上的函数 $x\to\operatorname{Log}x$ 的平均值. 当所有 α_i 都等于 1 时，关系式

$$n\operatorname{Log}a=\sum\operatorname{Log}x_i=\operatorname{Log}(\prod x_i).$$

指出，$\mathscr{M}_0(\mu)=(\prod x_i)^{1/n}$，即 x_i 的几何平均值. 因而我们也将称

$\mathscr{M}_0$ 为几何平均值.

平均值的比较 对于任何 A 上的严格单调连续函数 f, $\mathscr{M}_f$ 为 A 上的离散测度集的数值函数. 我们将寻求在怎样的条件下 $\mathscr{M}_f=\mathscr{M}_g$, 或更一般地 $\mathscr{M}_f\leqslant\mathscr{M}_g$.

引理 20-2 设 f 为 $\mathbb{R}$ 的区间 A 上的数值凸函数. 对于任何 A 上的测度 μ, 有

$$f(\mathscr{M}_1(\mu))\leqslant\mathscr{M}_1(f(\mu)).$$

等式仅当 f 在支撑 μ 的最小区间上是仿射函数时成立.

证明 如果 $\mu=(\alpha_i,\ x_i)_{i\in I}$, 设 G 为测度 $(\alpha_i,\ M(x_i))_{i\in I}$ 的重心,其中 $M(x_i)$ 表示 f 的图象中横坐标为 x_i 的点.

G 的坐标 x, y 为

$$x=\mathscr{M}_1(\mu)\quad 和\quad y=\mathscr{M}_1(f(\mu)).$$

由于 f 是凸的,集合 $A(f)$ 也是凸的,从而包含重心 G; 换句话说, G 在 f 的图象之上,即 $f(x)\leqslant y$; 而这无非就是所求的不等式.

如果 f 在区间 $[\inf(x_i),\ \sup(x_i)]$ 上仿射, G 显然在 f 的图象上,故 $f(x)=y$. 如果不是,记 $\inf(x_i)$ 为 x_1, 记 $\sup(x_i)$ 为 x_2; 对于任何 $x\in]x_1,\ x_2[$, $M(x)$ 严格在 Γ 之上; 这特别是对测度 $\nu'=(\alpha_i,\ M(x_i))_{i=1,2}$ 的重心成立; 我们也置 $\nu''=(\alpha_i,\ M(x_i))_{i\neq1,2}$.

重心的一条熟知的性质指出, G 属于连结 ν' 和 ν'' 的重心的线段; 由于两者都在 Γ 之上, 其中之一还严格在 Γ 之上,故 G 也严格在 Γ 之上; 换句话说, $f(x)<y$.

例 如果 f 严格凸,对于任何不被单独一个点支撑的 μ, 有:

$$f(\mathscr{M}_1(\mu))<\mathscr{M}_1(f(\mu)).$$

系 20-3 设 f 为 $\mathbb{R}$ 的区间 A 上的严格递增的连续数值函数; 我们有

$$(\mathscr{M}_1\leqslant\mathscr{M}_f)\Leftrightarrow(f\ 凸);\quad(\mathscr{M}_f\leqslant\mathscr{M}_1)\Leftrightarrow(f\ 凹).$$

当 f 递减时,交换"凸"和"凹"两个词,我们有类似的准则.

在这些不同的情形（f 凸或凹）中，仅当 f 在支撑 μ 的区间上仿射时，才有 $\mathscr{M}_1(\mu)=\mathscr{M}_f(\mu)$.

证明 假设 f 递增. 如果 f 凸，引理 20–2 指出：

$$f(\mathscr{M}_1(\mu))\leqslant \mathscr{M}_1(f(\mu)),$$

故
$$\mathscr{M}_1(\mu)\leqslant f^{-1}(\mathscr{M}_1(f(\mu)))=\mathscr{M}_f(\mu).$$

反之，如果 $\mathscr{M}_1\leqslant \mathscr{M}_f$，这就是说

$$f(\mathscr{M}_1(\mu))\leqslant \mathscr{M}_1(f(\mu)) \quad \text{对于任何 } \mu \text{ 成立.}$$

特别，对于任何形为 $(\alpha_i, x_i)_{i=1,2}$，$\alpha_1+\alpha_2=1$ 的 μ，有：

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\leqslant \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2),$$

即 f 是凸的.

由引理 20–2 可得，如果 f 凸，则仅当 f 在支撑 μ 的区间上仿射时，有 $\mathscr{M}_1(\mu)=\mathscr{M}_f(\mu)$.

用同样方式可处理 f 凹的情形. 如果 f 递减，则 $-f$ 递增，而由于 $\mathscr{M}_f=\mathscr{M}_{-f}$，由刚才建立的结果可得所述等价性.

定理 20-4 设 f, g 为在 $\mathbb{R}$ 的区间 A 上的两个严格单调连续函数.

1° $\mathscr{M}_f=\mathscr{M}_g$ 等价于

$$g=\alpha f+\beta, \quad \text{其中} \quad \alpha, \beta\in\mathbb{R}, \alpha\neq 0.$$

2° $\mathscr{M}_f\leqslant \mathscr{M}_g$ 等价于或者 g 递增而 $g\circ f^{-1}$ 凸，或者 g 递减而 $g\circ f^{-1}$ 凹.

在这两种情形，当 $g\circ f^{-1}$ 严格凸或凹时，仅在 μ 由单独一个点支撑的场合才有 $\mathscr{M}_f(\mu)=\mathscr{M}_g(\mu)$.

证明 1° 关系式 $\mathscr{M}_f=\mathscr{M}_g$ 意味着对于任何测度 $(\alpha_i, x_i)_{i\in I}$ 满足 $\sum\alpha_i=1$，我们有：

$$f^{-1}(\sum\alpha_i f(x_i))=g^{-1}(\sum\alpha_i g(x_i)).$$

如果置
$$h=g\circ f^{-1} \quad \text{和} \quad y_i=f(x_i),$$

这个关系式变为：

$$h(\sum \alpha_i y_i) = \sum \alpha_i (h \circ f)(x_i) = \sum \alpha_i h(y_i),$$

或者
$$\mathcal{M}_1(f(\mu)) = \mathcal{M}_h(f(\mu)).$$

由于测度 $f(\mu)$ 可以是 $f(A)$ 上的任意测度，这个关系式可简单地记为 $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_h$；而系 20-3 指出，这表示 h 既是凸的又是凹的，因而是仿射的；换句话说，有：

$$(g \circ f^{-1})(y) = \alpha y + \beta, \quad \alpha \neq 0;$$

或者再置 $f^{-1}(y) = x$，有：

$$g(x) = \alpha f(x) + \beta.$$

2° 现在研究不等式 $\mathcal{M}_f \leqslant \mathcal{M}_g$，首先假设 f 和 g 递增. 与上面平行的计算指出，关系式 $\mathcal{M}_f \leqslant \mathcal{M}_g$ 等价于 $\mathcal{M}_1 \leqslant \mathcal{M}_h$，根据系 20-3，这等价于 $h = g \circ f^{-1}$ 是凸的.

如果 f 递增，而 g 递减，由于 $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_{-g}$，不等式 $\mathcal{M}_f \leqslant \mathcal{M}_g$ 可说成函数 $-g \circ f^{-1}$ 的凸性，也就是 $g \circ f^{-1}$ 的凹性.

另外两种情形只需注意到两个函数 $u \to g(u)$ 和 $u \to g(-u)$ 同时是凸的或凹的，可由上面的结果推得.

当 h 严格凸或凹时，系 20-3 指出，仅当 $f(\mu)$ 以至 μ 被一个单独的点支撑时，才有 $\mathcal{M}_1(f(\mu)) = \mathcal{M}_h(f(\mu))$；这就得到后一陈述.

实用准则 20-5 假设 f 和 g 具有二阶导数，且 f' 和 g' 处处 $\neq 0$；那末

$$(\mathcal{M}_f \leqslant \mathcal{M}_g) \Leftrightarrow (f''/f' \leqslant g''/g').$$

证明 由于把 f 换为 $-f$ 或把 g 换为 $-g$ 使待建立的关系式中涉及的所有的量都是不变的，我们可以只考虑 f, g 递增的情形.

关系式 $\mathcal{M}_f \leqslant \mathcal{M}_g$ 于是等价于 $g \circ f^{-1}$ 的凸性；置：

$$F(y) = (g \circ f^{-1})(y) \quad 和 \quad y = f(x);$$

我们有：
$$\frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{g'(x)}{f'(x)}.$$

F 的凸性可说成 dF/dy 对于 y 递增，或者因为 f 对于 x 递增，也可说成 g'/f' 递增，即 $(g''f'-g'f'')\geqslant 0$，或者 $f''/f'\leqslant g''/g'$.

例　置:

$$f_r(x)=x^r \quad 和 \quad f_0(x)=\operatorname{Log} x.$$

对于任何 r，有:

$$f_r''/f_r'=(r-1)x^{-1} \quad 在]0,\ \infty[上成立.$$

既然 $(r-1)x^{-1}$ 是 r 的递增函数，故 $\mathscr{M}_r$ 也是 r 的递增函数. 更确切地说，因为 $(r-1)x^{-1}$ 是 r 的严格递增函数，故当 $r<r'$，且 μ 不被一个点所支撑时，有:

$$\mathscr{M}_r(\mu)<\mathscr{M}_{r'}(\mu).$$

我们在这里可证实 $r=0$ 的情形并不构成一个例外，这也说明了所采用的记号的合理性.

特别是我们重新回到经典不等式:

调和平均值≤几何平均值≤算术平均值≤平方平均值.

注　准则 20-5 特别有意义，因为在所面临的函数 f 的集合中，提供同样的平均值的函数 f 的类中的每一个是用商 f''/f' 来刻划的. 这些商构成 A 上的函数的向量空间，其自然序表达了平均值集合上的序.

命题 20-6　Hölder 不等式　给定有限数列 $\alpha,\ \beta,\cdots,\ \lambda>0$，满足 $\alpha+\beta+\cdots+\lambda=1$，以及同样长度的 $\geqslant 0$ 的数的有限族列 $(a_i)_{i\in I}$，$(b_i)_{i\in I}$，$\cdots$，$(l_i)_{i\in I}$.

那末我们有:

$$\sum_i a_i^\alpha b_i^\beta\cdots l_i^\lambda\leqslant\left(\sum a_i\right)^\alpha\left(\sum a_i\right)^\beta\cdots\left(\sum b_i\right)^\lambda. \tag{1}$$

等号仅当或者这些族之一的全部元素都是零，或者所有这些族都成比例.

证明　如果这些族中之一的所有元素都为零，关系式可写成 $0=0$. 否则我们可以记:

$$\frac{\sum a_i^\alpha b_i^\beta \cdots l_i^\lambda}{(\sum a_i)^\alpha (\sum b_i)^\beta \cdots (\sum l_i)^\lambda}$$
$$=\sum \left(\frac{a_i}{\sum a_i}\right)^\alpha \left(\frac{b_i}{\sum b_i}\right)^\beta \cdots \left(\frac{l_i}{\sum l_i}\right)^\lambda. \tag{2}$$

既然关系式 $\mathscr{M}_0 \leqslant \mathscr{M}_1$ 指出:

$$A^\alpha B^\beta \cdots L^\lambda \leqslant \alpha A + \beta B + \cdots + \lambda L,$$

且等式仅当 $A = B = \cdots = L$ 时成立; 关系式 (2) 的右端因而不大于

$$\sum \left(\alpha \frac{a_i}{\sum a_i} + \beta \frac{b_i}{\sum b_i} + \cdots + \lambda \frac{l_i}{\sum l_i}\right) = \alpha + \beta + \cdots + \lambda = 1,$$

且等式仅当对于任何 i, 有:

$$\frac{a_i}{\sum a_i} = \frac{b_i}{\sum b_i} = \cdots = \frac{l_i}{\sum l_i},$$

这表达了族 (a_i), (b_i), …等相互成比例.

Hölder 不等式的另一种形式 设 r 为 >0 的数; 在关系式 (1) 中我们用 $\omega_i a_i^{r/\alpha}$ 代替 a_i, 用 $\omega_i b_i^{r/\beta}$ 代替 b_i, …, 其中 ω_i 都 >0; 我们得到:

$$\sum \omega_i (a_i b_i \cdots l_i)^r \leqslant \left(\sum \omega_i a_i^{r/\alpha}\right)^\alpha \left(\sum \omega_i b_i^{r/\beta}\right)^\beta \cdots$$

经过表达记号的变化后, 这个关系式可写成:

$$\left(\sum \omega_i (a_i b_i \cdots l_i)^r\right)^{1/r} \leqslant \left(\sum \omega_i a_i^{p_1}\right)^{1/p_1} \left(\sum \omega_i b_i^{p_2}\right)^{1/p_2} \cdots,$$

其中 $$p_1, p_2, \cdots > 0,$$

且 $$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots = \frac{1}{r}.$$

更简洁地, 这个关系式可写成:

$$\mathscr{M}_r(ab \cdots l) \leqslant \mathscr{M}_{p_1}(a) \mathscr{M}_{p_2}(b) \cdots$$

特别重要的情形是 $r = 1$ 和只有两个族的情形.

Hölder 不等式于是可写成:

$\sum \omega_i a_i b_i \leqslant \left(\sum \omega_i a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum \omega_i b_i^q\right)^{1/q}$, 其中 $1/p + 1/q = 1$.

更特殊的是 $p = q = 2$ 的情形, 我们可以得到 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$(\sum \omega_i a_i b_i)^2 \leqslant (\sum \omega_i a_i^2)(\sum \omega_i b_i^2).$$

Minkowski 不等式 20-7 这个不等式简单地表达了某个正齐次函数在 $\mathbb{R}^n$ 中凸：

给定数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \geqslant 0$ 和数 $p \geqslant 1$；我们考虑如下定义的 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 f:

$$x = (x_i) \to (\sum \alpha_i |x_i|^p)^{1/p}.$$

函数 f 显然是正齐次的，且正如命题 19-6 的例子中那样，它是凸的．于是有 (Minkowski) 不等式：

$$(\sum \alpha_i |x_i + y_i|^p)^{1/p} \leqslant (\sum \alpha_i |x_i|^p)^{1/p} + (\sum \alpha_i |y_i|^p)^{1/p}.$$

当 α_i 都 >0，且 $p>1$ 时，f 严格凸（除了在起点为 0 的射线上以外），故不等式当族 (x_i) 和 (y_i) 不成比例时是严格的．

这个不等式可直接推广到 x_i, y_i 是复数的情形．

VI．习　　题

说明：较难的习题都打上了星号．

定义在任意集合上的数值函数

*1° 设 $(x_i)_{i\in I}$ 和 $(y_j)_{j\in J}$ 为两个 $\geqslant 0$ 的实数有限族，且满足

$$\sum_i x_i = \sum_j y_j.$$

指出，存在 $\geqslant 0$ 的实数有限族 $(z_{ij})_{i,j\in I\times J}$，满足：

$$\text{对于任何 } i \in I,\ x_i = \sum_j z_{ij},$$

$$\text{对于任何 } j \in J,\ y_j = \sum_i z_{ij}.$$

*2° 把上述结果推广到有序空间 $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ 的 $\geqslant 0$ 的元素族，其中 E 是任意集合．

定义在拓扑空间上的数值函数

3° 设 f 为定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的数值函数，且对于任何 x，映射 $y \to f(x, y)$ 是

递增的，对于任何 y，映射 $x\to f(x, y)$ 是递增的．指出，当在某一可确定的意义下，x 和 $y\to+\infty$ 时，f 趋向于一个极限．

4° 设 f 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的数值函数．我们令 A 为 $\mathbb{R}$ 的满足：

$$\lim_{x\to a}\sup_{x>a} f(x)\neq\lim_{x\to a}\sup_{x<a} f(x)$$

的 a 的点集．指出 A 至多为可数集．

*5° 设 f 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的数值函数．指出使 $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$ 存在但不同于 $f(a)$ 的 $\mathbb{R}$ 的 a 的点集至多为可数集．

*6° 设 f 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的数值函数．我们说 f 在点 $a\in\mathbb{R}$ 有相对最大值，是指存在 a 的邻域 V，使得 $f(x)\leqslant f(a)$ 对于任何 $x\in V$ 成立．设 A 为这些点 a 的集合．指出 $f(A)$ 至多为可数集．

7° 设 $(f_i)_{i\in I}$ 定义在距离空间 E 上的有限数值函数的一致等度连续族．

a) 指出，如果函数 $\sup_{i\in I} f_i$ 和 $\inf_{i\in I} f_i$ 有限，则它们是一致连续的．

b) 指出，形为 $\sup_{i\in J} f_i$ 或 $\inf_{i\in J} f_i$（其中 J 为 I 的任意子集）的有限函数族 (f_J) 是一致等度连续的．

半连续数值函数

8° 设 f, g 为两个拓扑空间 E 到 $\mathbf{R}$ 的下半连续映射．指出，如果 $f+g$ 连续，则 f 和 g 也连续．

*9° 设 f 为区间 $[0, 1]$ 上的下半连续数值函数．

a) 指出 f 为满足 $g\leqslant f$ 的连续函数 g 的上包络．

b) 指出 f 为连续函数递增列的极限．

*10° 把上述结果推广到任何有可数基的距离空间上的下半连续有限数值函数 f．

11° 设 f 为定义在拓扑空间 E 上的下半连续数值函数．指出，对于 E 的任何非空子集 A，有：

$$\sup_{x\in\bar{A}} f(x)=\sup_{x\in A} f(x).$$

12° 对于任何在不可约形式下的有理数 $r=p/q\,(q>0)$，置：$f(r)=q$；指出，f 在 $\mathbb{Q}$ 上下半连续，且在任何点 $r\in\mathbb{Q}$ 上，f 的振幅为 $+\infty$．

*13° 设 E 为距离空间，K 为 $\mathbb{R}\times E$ 的紧子集．对于任何 $x\in\mathbb{R}$，置 $q(x)=$ 横坐标为 x 的 K 的点的集合的直径．指出，$q(x)$ 是上半连续函数．

14° 设 f 为定义在拓扑空间 E 上的数值函数．指出其上 f 的振幅 $\geqslant\lambda$

的 E 的点的集合是闭集，这里 $\lambda>0$.

由此推得，f 的连续点的集合是可数多个开集的交.

15° 设 f 为定义在正方形 $C=[0, 1]^2$ 中的连续数值函数；我们说 f 为按段线性的，是指存在 C 的有限三角形覆盖，使得 f 在每个三角形上为仿射函数. 设 $\mathscr{P}$ 为这种函数构成的向量空间，并被赋以一致收敛拓扑. 令 $\alpha(f)$ 为 f 在 Euclide 空间 $\mathbf{R}^3$ 中的图象的初等面积. 指出，$\alpha(f)$ 是 $\mathscr{P}$ 上的下半连续函数.

Stone-Weiestrass 定理

16° 利用递推推理，试指出，存在实多项式列 (p_n)，它在区间 $[0, 1]$ 上递增，且在这个区间上一致收敛于 $\sqrt{t}$. 为此，置

$$p_{n+1}(t)=p_n(t)+\frac{1}{2}(t-p_n^2(t)) \quad 和 \quad p_1=0,$$

且指出这样用递推定义的序列 (p_n) 有所需要的性质.

17° 设 E 为紧空间，(f_i), $i=1, 2, \cdots, n$ 是 $\mathscr{C}(E, \mathbf{R})$ 的 n 个分离 E 的点的元素的族. 指出 E 同胚于 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集.

18° 设 a_1, a_2, a_3 为 $\mathbf{R}^2$ 的三个不共线的点. 我们以 f_i 表示函数 $x\to\|x-a_i\|$. 指出，$\mathbf{R}^2$ 上的任何连续数值函数是关于 f_1, f_2, f_3 的或关于这些函数的平方的(无常数项)多项式列的极限，且该多项式列在 $\mathbf{R}^2$ 的任何紧集上一致收敛.

定义在区间上的函数

19° 设 f 为 $\mathbf{R}$ 的区间 $I=[a, b]$ 上的连续有限数值函数.

我们说 f 在点 $x_0\in\mathring{I}$ 上右递增，是指存在数 $x_1>x_0$，使得对于任何 $x\in[x_0, x_1]$，有 $f(x_0)\leqslant f(x)$. 同样可定义右递减.

指出，如果 $f(a)=f(b)=0$. 则存在 $\mathring{I}$ 的点 c_1，其上 f 右递增，以及存在 $\mathring{I}$ 的点 c_2，其上 f 右递减(同样也可对于左方讨论).

20° 设 f 为区间 $[a, b]$ 上的可导连续数值函数. 利用经典的 Rolle 定理指出，即使 f' 不连续，f' 仍取遍 f'_a 和 f'_b 之间的所有值(指出对于任何满足 $f'_a<\lambda<f'_b$ 的 λ，存在 $x\in[a, b]$，使得弦 $M(a)M(x)$ 和 $M(x)M(b)$ 之一有斜率 λ). 由此推得 $f'([a, b])$ 为连通集.

21° 设 f 为开区间 $]a, b[$ 上的可导连续数值函数. 如果 $\alpha=\lim\limits_{x\to a} f'(x)$

存在且有限，指出，$\lim_{x\to a}(f(x))$ 存在，f 具有在 $[a, b[$ 上的连续延拓，且在 a 上可导，导数等于 α.

22° 设 f 为区间 $I=[a, b]$ 上的连续数值函数，A 为 I 的如下内点 x 的集合，即存在 $y>x$，使得$f(y)>f(x)$. 指出，A 是开集，且对于每个组成 A 的相互间不相交的区间 $]\alpha, \beta[$，有 $f(\alpha)\leqslant f(\beta)$，且当 $\alpha\neq a$ 时等号成立.

23° 设 g 为 $I=[a, b]$ 上的连续递增数值函数，k 为 >0 的数.

设 B 为 I 的内点的集合，并对该x，存在 $y>x$，使得 $g(y)-g(x)>k(y-x)$ 利用上一习题，指出 B 为其长度和 $\leqslant(g(b)-g(a))/k$ 的可数个开区间的并.

24° 设 f 为区间 $[a, b]$ 到完备距离空间 E 的正规映射. 指出，$f([a, b])$ 在 E 中相对紧.

*25° (这一习题要求第七章的知识). 设 f 为 $\mathbf{R}$ 的区间 I 到 ($\mathbf{R}$ 上的) 拓扑向量空间 E 的连续映射; X 为 E 的定义为开半空间族 $\{x: l_i(x)>\alpha_i\}$的交所形成的凸集，其中 l_i 为 E 上的连续线性形式，α_i 为纯量.

假设存在 I 的可数子集 D，使得任何 $(I\dot{-}D)$ 的点 x 上 f 有右导数 $f'_d(x)\in X$.

a) 利用 15-4 指出，对于任何 $a, b\in I$，$f(b)-f(a)\in(b-a)X$.

b) 利用第七章习题 16，重新指出陈述 15-6.

凸 函 数

26° 设 $(f_i)_{i\in I}$ 为 $\mathbf{R}$ 的开区间 I 上的凸函数族. 指出，如果族 (f_i) 一致有上界，且存在 $c\in I$，使得族 $(f_i(c))$ 有下界，那末族 (f_i) 在 I 的任何紧区间上一致等度连续.

27° 设 f_n 为 $\mathbf{R}$ 的开区间 I 上的凸函数列，它单收敛于有限函数 f. 利用上一习题，指出收敛在 I 的任何紧区间上是一致的.

*28° 把上两习题推广到 $\mathbf{R}^2$ (或者更一般的 $\mathbf{R}^n$) 的凸子集 X 上.

29° 设 f, g 为向量空间的凸子集 X 上的两个凸函数; 指出，如果 $(f+g)$ 在 X 上仿射，那末 f 和 g 都仿射.

30° 设 f 为紧区间 $[a, b]$ 上的凸函数，且 $f'_d(a)$ 和 $f'_g(b)$ 有限. 指出 f 为 $\mathbf{R}$ 上的凸函数在 $[a, b]$ 上的限制.

31° 设 f 为偶 (x, t) 的连续数值函数，其中 $a\leqslant x\leqslant b$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$. 如果 g 对于任何 t 是 x 的凸函数，证明函数:

$$f(x)=\int_\alpha^\beta g(x, t)\,dt$$

的凸性.

32° 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上的凸函数，φ 为 $\mathbf{R}$ 上的连续且 $\geqslant 0$ 的函数，而它在某个紧集外为零.

a）指出，函数 $F(x)=\int_{\mathbf{R}} f(x-t)\varphi(t)\,dt$ 在 $\mathbf{R}$ 上是凸的.

b）设 ψ 为如下定义的函数:

$$\psi(t)=0 \quad 当 \quad |t|\geqslant 1;\quad \psi(t)=ke^{(t^2-1)^{-1}} \quad 当 \quad |t|<1;$$

其中 k 使 ψ 在 $\mathbf{R}$ 上的积分等于 1.

指出，ψ 在 $\mathbf{R}$ 上具有任何阶导数.

c）指出，凸函数:

$$f_a(x)=a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\psi(at)\,dt=a\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi(a(x-t))\,dt$$

无限次可导，且当 $a\to+\infty$ 时，f_a 在 $\mathbf{R}$ 的任何紧区间中一致收敛于 f.

33° 设 f 为 $]0, +\infty[$ 上的递增凸函数. 指出，或者 $f=$常数，或者 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

34° 设 f 为区间 $[a, +\infty[$ 上的凸函数. 指出，当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)/x$ 趋向于有限值或 $+\infty$. 再指出，当这个极限 $\leqslant 0$ 时，函数 f 在 $[a, +\infty[$ 上递减.

*35° 设 f 为区间 $[0, +\infty[$ 上的凸函数.

a）指出，函数 φ 定义为

$\varphi(x)=f(x)-xf'_d(x)$ （右切线在原点的纵坐标）是递减的.

b）指出，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ 是有限数 β，那末 $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x$ 也有限，$f(x)-(\alpha x+\beta)\geqslant 0$，且当 $x\to+\infty$ 时，它趋向于 0.

36° 把命题 18-4 如下推广到半连续函数 f: 对于任何 a 和 $b\in I$，存在 $x\in\,]a, b[$，使得 $M(x)$ 在线段 $M(a)M(b)$ 之下.

37° 设 f 为 $\mathbf{R}$ 的开区间 I 上的严格递增(相应地，递减)函数. 指出，为使 f 是凸的，必需且只需其逆函数 f^{-1} 是凹的(相应地，凸的).

38° 设 f 为 $\mathbf{R}$ 的区间 I 上的连续有限数值函数. 指出，如果对于任何 $a\in I$，存在包含 $M(a)$ 并位于 f 的图象之下的右开区间，则函数 f 是凸的.

39° 利用半平面 $x>0$ 到自身的射影变换 $(x, y)\to(x^{-1}, yx^{-1})$ 的性质，指出，如果 f 对于 $x>0$ 是凸的，函数 $x\to xf(x^{-1})$ 也是凸的，且反之亦然.

然后利用习题 32，给出另一个证明.

40° a）利用习题 32，指出，如果 f 和 g 都在同一个区间 I 中非负、凸且递增(或递减)，则乘积 fg 是凸的.

b）用同样的方法，陈述 $f\circ g$ 为凸的准则.

41° 设 f 为区间 $I\subset\mathbf{R}$ 中的非负函数. 如果 $\log f$ 在 I 上凸，我们将说 f **对数凸**.

指出，如果 f 对数凸，则 f 为凸的.

指出，如果 f 和 g 都对数凸，则 fg 也对数凸.

为此将利用习题 32; 在下一习题中也一样.

*42° 指出两个对数凸的函数和也是对数凸的. 为此，注意到下列情况将是方便的: 对于连续的 f，我们有下列对数凸准则:

$$f^2\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant f(a)f(b)$$

对于任何 a, b 成立.

43° 设 $f(x, t)$ 为有限 >0 的数值函数，它定义在 $\mathbf{R}$ 的两个开区间 I 和 J 的乘积 $I\times J$ 上，连续，且对于任何 $t\in J$，$f(x, t)$ 关于 x 对数凸.

指出，如果对于任何 $x\in I$，积分

$$g(x)=\int_J f(x, t)\,dt$$

收敛，则 g 对数凸. 可利用习题 42.

44° 置

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

利用习题 43 指出，对于任何 $x>0$，这个积分有限，且函数 Γ 在 $]0, \infty[$ 上对数凸.

指出，对于任何整数 n，有: $\Gamma(n+1)=n!$.

45° 设 $\mathscr{K}$ 为开区间 $]a, b[$ 上的非负凹函数集合.

a）指出，$\mathscr{K}$ 可由关系

$$f\prec g \quad 是指 \quad (g-f)\in\mathscr{K}$$

来建立序.

b）我们说 $\mathscr{K}$ 的元素 f 为**端元素**，是指任何关系: $g\prec f$, $g\in\mathscr{K}$ 导致 $g=\lambda f$，其中 $\lambda\in[0, 1]$.

指出，$\mathscr{K}$ 的仅有的端元素为在 a 和 b 上为零、在两个区间 $[a, c]$, $[c, b]$（其中 $c\in\,]a, b[$）上仿射的函数的迹，或者在 $]a, b[$ 上仿射、在 a 或 b 上为零的函数的迹.

c）利用习题 32，指出，赋以序 $\prec$ 的 $\mathscr{K}$ 是格.

*46° 指出，对于任何不同于 $\mathbf{R}^2$ 的单连通开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$，存在定义在 Ω 上的连续数值函数 f，它在 Ω 中**局部凸**，但不能延拓为在任何严格包含 Ω 的开集 Ω' 上的同一类型的函数.

平均值和不等式

47° 指出，周长为 $2p$ 的三角形当三边 a, b, c 相等时面积最大（利用关系式 $\mathscr{M}_0<\mathscr{M}_1$ 以及面积的作为 $p, (p-a), (p-b), (p-c)$ 的函数的表达式）.

48° 指出，给定面积的直方块体积当它为立方体时最大.

49° 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 >0 的数；a 为它们的几何平均值. 指出，

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant(1+a)^n,$$

等式仅当所有 a_i 都相等时成立.

50° 设 μ 为 $]0, \infty[$ 上的离散测度. 指出，函数 $r\to(\mathscr{M}_r(\mu))^r$ 是对数凸的.

51° 设 φ 为 $\mathbf{R}$ 的开区间 I 上的连续数值函数，$a\in I$.

a) 指出，存在 $]0, \infty[$ 上的（唯一的）严格递增函数 Φ，满足：

$$\Phi''=\varphi\Phi';\quad \Phi(a)=0;\quad \Phi'(a)=1.$$

b) 如果 μ 表示 I 上的任意离散测度，置

$$I(\varphi)=\Phi(\mathscr{M}_\Phi(\mu)).$$

指出函数 I 在向量空间 $\mathscr{C}(I, \mathbf{R})$ 中是对数凸的.

52° 对于任何 $f\in\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ 和任何 $p>0$，置

$$N_p(f)=\left(\int_0^1|f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

a) 指出，如果 $p>1$，则 N_p 为 $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ 上的凸函数.

现在我们假设 f 给定，且 >0.

b) 指出，函数 $p\to N_p(f)$ 递增，且无限次可导.

c) 指出，$(N_p(f))^p$ 是 p 的对数凸函数.

d) 指出，$N_p(f)$ 为 p^{-1} 的对数凸函数（利用习题 39）.

53° 利用习题 52 的记号，指出，当 $p^{-1}+q^{-1}=1$ 时，我们有不等式

$$N_1(fg)\leqslant N_p(f)N_q(f).$$

54° 我们以 $\varphi, \psi, \cdots$ 表示 $[0, \infty[$ 上的严格递增连续函数，且对于任何 $f\in\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$，$f\geqslant0$，用关系式

$$\varphi(\mathscr{M}_\varphi(f))=\int_0^1\varphi(f(x))\,dx$$

定义 $\mathscr{M}_\varphi(f)$. 指出，$(\mathscr{M}_\varphi\leqslant\mathscr{M}_\psi)$ 等价于 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 的凸性.

55° 设 φ 为区间 $[0, a]$ 的严格递增连续函数，且 $\varphi(0)=0$；又设 ψ 为 φ 的逆函数.

指出，对于任何 x, y 满足 $x\in[0, a]$，$x\in[0, \varphi(a)]$，有：

$$xy \leqslant \int_0^x \varphi(t)\,dt + \int_0^y \psi(t)\,dt,$$

不等式仅当 $y=\varphi(x)$ 时成立.

56° 用同样的记号，以 Φ 和 Ψ 分别表示在 0 点为零的 φ 和 ψ 的原函数. 于是设 f, g 为两个在 $[0, 1]$ 上连续、分别在 $[0, a]$ 和 $[0, \varphi(a)]$ 上取值的函数. 指出,

$$\int_0^1 f(u)\, g(u)\, du \leqslant \int_0^1 \Phi(f(u))\, du + \int_0^1 \Psi(g(u))du.$$

VII. 第六章的法汉术语对照和索引(1)

(1) 表中的数字表示节和段，或者某一习题的序号。

VIII. 参考书目

Bourbaki, N., Fonctions d'une variable réelle, ch. I, II, III, fasce n° 1074, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris.

Hardy, Littlewood, Polya, Inequalities, Cambridge University Press, 1952. (有中译本, 不等式, 科学出版社)

IX. 定义和公理

上包络. 所谓集合 E 上的数值函数族 $(f_i)_{i\in I}$ 的上包络是指函数:

$$f=\sup_{i\in I} f_i,$$

它定义为: $f(x)=\sup_{i\in I} f_i(x)$ 对于任何 $x\in E$ 成立.

上极限. 设 f 为集合 E 上的数值函数, $\mathscr{B}$ 为 E 上的滤子基. 所谓 f 沿 $\mathscr{B}$ 的上极限是指 $\bar{f}(\mathscr{B})$ 的上确界 (其中 $\bar{f}(\mathscr{B})=\bigcap_{B\in\mathscr{B}}\overline{f(B)}$); 记它为 $\limsup_{\mathscr{B}} f$.

下半连续性. 定义在拓扑空间 E 上的数值函数 f 称为在点 a 上下半连续, 是指对于任何 $\lambda<f(a)$, 存在 a 的邻域 V, 使得 $\lambda<f(V)$.

单变量凸函数. 设 f 为定义在 $\mathbb{R}$ 的区间 I 上的有限数值函数. 我们说 f 为凸的, 是指对于任何 $x_1, x_2\in I$, 满足 $x\in[x_1, x_2]$ 的任何 f 的图象上的点 $M(x)$ 在线段 $M(x_1)M(x_2)$ 之下.

向量空间子集上的凸函数. 设 f 为定义在($\mathbb{R}$ 上的)向量空间 E 的子集上的有限数值函数.

我们说 f 是凸的, 是指位于 f 的图象之上的向量空间 $E\times\mathbb{R}$ 的点集是凸的.

正齐次函数. 设 f 为定义在 ($\mathbb{R}$ 上的) 向量空间 E 的子集 X 上的数值函数. 我们说 f 是正齐次的, 是指 X 是顶点为 0 的锥, 且

$$f(\lambda x)=\lambda f(x) \quad \text{对于任何 } x\in X \text{ 和任何 } \lambda>0 \text{ 成立.}$$

单调函数的相对平均值. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 的区间 A 上的严格单调连续数值函数; $\mu=(\alpha_i, x_i)_{i\in I}$ 为 A 上的正离散测度.

所谓 μ 相对于 f 的平均值, 是指满足

$$\left(\sum_i \alpha_i\right)f(a)=\sum_i \alpha_i f(x_i)$$

的数 a.

记这个数 a 为 $\mathscr{M}_f(\mu)$.